

Biljari u klasičnom i kvantnom svijetu

Vjera Lopac

Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb

Što je biljar? Sport, društvena igra,...? Znamo o čemu je riječ: u pravokutnoj udubini koja zauzima površinu biljarskog stola gibaju se tvrde kugle, te se sudaraju međusobno i sa stijenkama udubine. Sudari su gotovo potpuno elastični i često ćemo u fizici pri opisu elastičnih sudara spomenuti usporedbu s biljarskim kuglama.

U novije vrijeme, riječ BILJAR je u fizici dobila novo, posebno značenje. Biljar i ovdje znači udubinu sa sasvim tvrdim stijenkama. No unutar nje se (najčešće) giba jedna čestica, a oblik biljara više nije nužno pravokutan. To može biti kvadrat, krug, trokut, elipsa, ili neki sasvim drukčiji, manje ili više pravilan, zatvoreni dvodimenzionalan geometrijski lik.

Što u takvom biljaru zanima fizičara? Ako u nekom početnom trenutku poznajemo položaj čestice i njezinu brzinu, možemo li na temelju Newtonovih zakona gibanja odrediti gdje će se u nekom zadanom trenutku u budućnosti čestica nalaziti i kakvom će se brzinom tada gibati?

Pravila gibanja vrlo su jednostavna. Upada li čestica okomito na ravnu stijenku, ona se odbije i vrati jednakom brzinom u suprotnom smjeru. Upadne li čestica na stijenku pod nekim kutom prema okomici, nakon sudara je kut odbijanja jednak kutu upada. U tom sudaru brzina se ne mijenja po iznosu, ali se promijeni komponenta brzine u smjeru okomitom na stijenku. Ista pravila vrijede i ako je rub biljara zakrivljen, stoga što se na mjestu sudara mali djelić glatke stijenke može poistovjetiti s tangentom na stijenku u točki sudara (slika 1). Budući da su sudari elastični, kinetička energija čestice je konstantna, tj. ne mijenja se tijekom vremena.

Rješavanje problema biljara svodi se, dakle, na računanje uzastopnih sudara sa stijenkom. Za svaki pojedini, n -ti sudar, treba izračunati mjesto gdje će se sudar dogoditi i smjer u kojem će se nakon sudara gibati čestica. Problem nije nov, i mogao se izučavati i

pred sto ili dvjesto godina. Pa kako to da je tek nedavno, prije svega dvadesetak ili nešto više godina za tu vrstu problema porastao interes?

Tome je više razloga. Prvi leži u vrtoglavom razvoju kompjutorske tehnike u zadnjih tridesetak godina. Da bi se izračunala mjesta i smjerovi sudara, treba svaki puta iz poznatih podataka za prethodni sudar izračunati podatke za sljedeći sudar. Želimo li pratiti velik broj sudara, ne samo stotine ili tisuće, već i nekoliko stotina tisuća uzastopnih sudara koji slijede jedan za drugim, moramo računati velikom brzinom i preciznošću, što bi s klasičnim načinom računanja bio neostvariv projekt.

Drugi razlog zanimanja za biljare leži u otkriću da, čak ni uz najtočnije metode računanja, u mnogim pojavama nikako ne možemo točno predvidjeti kako će se čestica ponašati. Pokazalo se da su gibanja u prirodi samo iznimno pravilna. Većina je gibanja nepredvidljiva na dulji rok, čak i kad su pravila svakog trenutka točno poznata. U toj su nepredvidljivosti ipak otkrivene mnoge zakonitosti, i time je otvoreno novo znanstveno područje koje se naziva nelinearnom fizikom, a poznato je i kao deterministički kaos.

Treći je razlog u iznenađujućoj činjenici da biljari ne predstavljaju samo apstraktne primjere iz teorijskih udžbenika, već se mogu i eksperimentalno ostvariti. Ti sustavi i modeli već su danas, a vjerojatno će još više biti u budućnosti, temelj za spektakularne inovacije u poluvodičkoj i laserskoj tehnologiji.

Klasični biljari – teorija

Želite li nešto naučiti o kaotičnoj dinamici, biljari su doista poučan primjer. Fizikalno su jednostavni, jer se čestica giba jednoliko tijekom bilo kojeg promatranog intervala. Da bismo uočili osobine tog gibanja, nije potrebno promatrati položaje i brzine u svakom trenutku, već ih je dovoljno zabilježiti u trenucima sudara. To nam omogućuje zorne i jednostavne slikovne prikaze gibanja.

Općenito, gibanje čestice može biti regularno (pravilno, predvidljivo) ili potpuno kaotično (nepravilno, nepredvidljivo). No mnogi sustavi imaju miješano ponašanje, te posjeduju i regularne i kaotične osobine, ovisno o tome kakvi su odabrani početni uvjeti.

Dvodimenzionalni biljari pokazuju sve te tipove ponašanja[1]. Neki su regularni, neki kaotični, a neki miješani. Vrsta ponašanja izrazito ovisi o obliku ruba biljara. Regularno ponašanje pokazuju pravokutni biljari (uključujući kvadrat), te kružni i eliptični biljari. Nekoliko mogućih staza (trajektorija, orbita) po kojima se čestica giba u tim biljarima (za nekoliko prvih sudara) prikazano je na slici 2. Orbite se vraćaju same u sebe, ili ispunjavaju dio površine biljara, dok neki dijelovi ostaju netaknuti.

Kao primjeri potpuno kaotičnih biljara najveću pozornost su privukli biljar oblika “stadiona” (slika 3a) i tzv. “Sinaijev biljar” (slika 3b). Iako je i u njima moguća poneka jednostavna periodična orbita, koja se vraća sama u sebe, ipak gotovo svi početni uvjeti vode na kaotično lutanje čestice prostorom biljara. Čestica će nakon izvjesnog broja sudara pohoditi svako mjesto unutar biljara, te će poprimiti i sve moguće smjerove gibanja. Slike 4a i 4b prikazuju nam dvije regularne orbite u “stadionu”, a na slici 4c je pravilna orbita u pravokutnom Sinaijevom biljaru, koja prolazi pokraj središnje zapreke bez sudara. Na slici 4d je tipična kaotična orbita za biljar u obliku “stadiona”.

Napokon, pokažimo i jedan primjer miješanog biljara, biljar limunolikog oblika kojemu su lukovi parabole[2]. Tu nalazimo mnogo pravilnih, periodičnih orbita, poput onih na slici 5a, 5b i 5c, ali i nepravilnih, poput one na slici 5d.

Ovi grafički prikazi jasno nas upućuju na razliku između regularnog i kaotičnog gibanja. No za miješane slučajeve takve slike ne daju pravu predodžbu o stvarnosti. Već nakon nekoliko sudara, kaotične trajektorije prekriju cijelu površinu biljara, pa se među njima ne mogu uočiti one koje su pravilne. Postoji, međutim, drugi način prikaza, tzv. Poincaréov presjek. On nam daje prikaz gibanja u tzv. faznoj ravnini, u kojoj je stanje čestice prikazano njezinim položajem x i brzinom v .

Što je to fazna ravnina? Općenito, fazni prostor je višedimenzionalni prostor u kojem se osim položaja, promatraju i komponente brzine čestice. Na primjer, u slučaju naših biljara, on ima četiri dimenzije. Poopćena “točka” u takvom je prostoru zadana s četiri fizikalne veličine: koordinatama položaja čestice x i y , te komponentama brzine u smjeru dviju osi v_x i v_y . No točke i krivulje u 4-dimenzionalnom, pa čak i u 3-dimenzionalnom prostoru, nije baš lako predočiti u ravnini crtnje, a vrijedan prikaz gibanja dobit ćemo i ako uzmemo samo dvije veličine: jednu koordinatu položaja čestice u trenutku sudara s biljarom, i neku

komponentu brzine u trenutku sudara. Sad će svaki pojedini sudar biti prikazan točkom, a ravninu prikaza zovem faznom ravninom.

Poincaréov presjek za regularni (pravokutni) biljar sadrži samo dvije odvojene točke, a za kaotični biljar (oblika stadiona) mnoštvo nasumce razbacanih točkaka u faznoj ravnini. Miješani je biljar (biljar oblika limuna s paraboličnim lukom) na slici 6, koja sadrži dvjesto tisuća točkaka za isto toliko sudara s rubom biljara.

Za regularni biljar u Poincaréovom presjeku sve točke padaju na samo jedno ili dva mjesta, što znači da se trajektorija uvijek vraća sama u sebe. Za potpuno kaotični biljar cijela je fazna ravnina gusto ispunjena točkama, a ako i postoji koja periodična trajektorija, njezina se čvrsta točka utopila u tom kaotičnom moru. Kod miješanih biljara za neke se početne uvjete pojavljuju zatvorene, pravilne, periodične orbite, koje se vraćaju same u sebe, te su prikazane čvrstim točkama. Druga grupa su orbite koje nastaju malim pomacima od regularnih orbita, ali ne prelaze u kaotičnost. U Poincaréovom presjeku te su točke smještene na manje ili više pravilnim zatvorenim krivuljama, no ne nižu se redom jedna do druge, već nasumce padaju po krivulji. Treću grupu čine kaotične orbite. One se u Poincaréovom dijagramu nižu bez ikakvog reda i predvidljivosti, i gusto popunjavaju dio fazne ravnine. Na takvim Poincaréovim presjecima za neke vrijednosti početnih uvjeta dijelovi ravnine ostaju potpuno prazni. No to su upravo oni dijelovi unutar kojih se, za neke druge početne uvjete, pojavljuju čvrste točke i zatvorene krivulje, one koje karakteriziraju pravilno ponašanje (slika 6).

Dakle, miješani biljari idealan su primjer sustava u kojima koegzistira i pravilno i nepredvidljivo gibanje. Oni su zapravo prototip gibanja kakvo se, na primjer, u stvarnosti susreće u Sunčevu sustavu, kad na gibanje planeta utječe gibanje nekog asteroida ili drugog planeta, pa je moguć i sasvim nepredvidljiv ishod. Slična su i vezana gibanja dvaju titrajnih sustava (njihala ili oscilatora), kakva nalazimo u mehaničkim ili električnim uređajima.

Biljari se u usporedbi s realističnim problemima doimaju vrlo jednostavnima. Da biste ipak uočili probleme s kojima se susrećemo pri izračunavanju trajektorija, riješite sljedeći zadatak:

 **Zadatak 1:** Biljar ima pravokutni oblik sa stranicama $a=4$ cm i $b=2\sqrt{3}$ cm. Postavimo koordinatni sustav tako da je jedan vrh biljara u ishodištu, te da dulja stranica

leži na pozitivnom dijelu osi x , a kraća stranica na pozitivnom dijelu osi y . Ako je poznato da se u početnom trenutku čestica nalazi u točki ($x = 1\text{ cm}$, $y = 0$), te da joj brzina ima iznos $v = 4\text{ cm/s}$ i da je usmjerena pod kutom od 60° prema osi x , odredite: a) U kojoj će se točki nalaziti čestica nakon 33 sekunde? b) Koliko će sudara s rubom biljara i u kojim točkama doživjeti čestica unutar tog vremena? Smatrajte da su sudari sa stijenkom potpuno elastični. c) Riješite isti problem tako da za kraću stranicu uzmete $b = 3,4\text{ cm}$. d) Nacrtajte trajektoriju čestice i početne točke u Poincaréovom dijagramu. 

U biljarima koje smo dosad promatrali, na česticu nisu djelovale dodatne sile. Fizičari, naravno, izučavaju i biljare u kojima djeluju sile. Tako je na slici 7 prikazano gibanje nabijene čestice u kružnom biljaru, smještenom u homogeno magnetsko polje, čije su silnice usmjerene okomito na ravninu biljara.

Klasični biljari - eksperiment

Kad bismo željeli eksperimentalno pokazati i izmjeriti svojstva biljara, naišli bismo na velike poteškoće. Na biljarskom stolu kuglici bismo dali početnu brzinu i , u skladu s teorijom, očekivali bismo da se ona između dvaju sudara giba pravocrtno i jednoliko, te da pri sudaru, koji mora biti potpuno elastičan, ne izgubi nimalo od svoje energije. U našim smo računima imali na desetke pa i stotine tisuća uzastopnih sudara. U pokusu nećemo uspjeti ostvariti više od desetak ili nešto više sudara, nakon čega će se kuglica zaustaviti. U stvarnosti ne možemo izbjeći trenje, a ni elastičnost sudara nije savršena.

No ako ipak želimo svojim očima vidjeti trajektoriju u biljaru zadanog oblika, tad ćemo slijediti savjet fizičara koji su se poslužili laserskom zrakom[3]. Laser daje vrlo uzak snop svjetlosti, a zakon refleksije u geometrijskoj optici tvrdi da je kut refleksije jednak kutu upada. Umjesto kružnog biljara s ravnim dnom, autori su, preporučujući svoj eksperiment kao dio školske nastave fizike, uzeli cilindar sa zrcalnom plohom na unutrašnjoj strani plašta, i usmjerili zraku ne baš sasvim okomito na stijenku cilindra. Gledajući duž osi cilindra, možemo pratiti trajektorije zrake (jednake stazama čestica u kružnom biljaru), kako one koje se nakon nekoliko refleksija zatvaraju same u sebe, tako i one koje gusto ispunjavaju prsten uz rub biljara. Spretnom pripremom na taj način možemo dobiti periodične

i kaotične trajektorije i za razne druge oblike biljara, samo treba malo vještine, strpljenja i kvalitetne opreme.

Drugi eksperiment (slika 8a) u kojem dolazi do izražaja važnost periodičkih orbita također je izveden s laserskom zrakom, u primijenjenim istraživanjima u Bell Laboratorijima u Americi, u cilju dobivanja mikrolasera velike snage[4]. Svaki laser osim izvora ima i rezonator, u kojem se proizvedena laserska zraka stalno vraća na istu stazu, te višestruko interferira sama sa sobom i stvara snop visoke koherencije. U ranijim rezonatorima koji su imali oblik ovalne pločice, zraka je putovala duž ruba biljara odbijajući se od stijenke i vraćajući se na svoj trag po stazi kakvu smo nazvali “stazom šaptačke galerije” (“whispering gallery orbit”), poput one na slici 2d. Tek nedavno otkriveno je da se može iskoristiti staza poznata kao “staza leptir-kravate” (“bow-tie orbit”, slika 8b). Te su staze izuzetno osjetljive na preciznost početnog kuta, no kad se ta preciznost postigne, dobiva se daleko veća koherencija. Snaga je takvog mikrolasera, zahvaljujući znalački odabranoj orbiti, povećana više desetaka puta.

Kvantni biljari - teorija

U zadatku pri kraju poglavlja o klasičnim biljarima navedene su dimenzije biljara. Veličine zadane u centimetrima tipične su za svijet klasične fizike. Biljar iz primjera o laseru bio je mnogo manji, u promjeru svega nekoliko desetaka mikrometara ($1\mu\text{m}=10^{-6}\text{m}$).

U atomskom svijetu sustavi su još manjih dimenzija, i tu umjesto Newtonovih zakona mehanike vrijede zakoni kvantne fizike. Promjer najmanjeg atoma je oko 0,1 nanometra, dakle 10^{-10}m . Dvadesetih godina ovog stoljeća otkriveno je da se u sustavima tako malih dimenzija položaj i brzina čestice ne mogu istodobno sasvim točno odrediti. Ta je važna prirodna činjenica sažeto izražena tzv. relacijama neodređenosti. Ako je nesigurnost s kojom poznajemo položaj čestice Δx , a nesigurnost s kojom poznajemo količinu gibanja čestice u smjeru osi x jednaka Δp_x , umnožak tih dviju veličina mora biti približno jednak ili veći od Planckove konstante h . Relacija neodređenosti dakle glasi

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h,$$

pri čemu je Planckova konstanta

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Uzmimo da čestica u našem zadatku ima masu $m=10\text{g}=0,01 \text{ kg}$. Tada je neodređenost x-komponente njezine količine gibanja između $-mv$ i $+mv$, dakle

$$\Delta p_x = 2mv,$$

a neodređenost položaja u smjeru osi x je

$$\Delta x = a.$$

Odatle je

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = 2mva = 2 \cdot 0,01\text{kg} \cdot 0,1\text{ms}^{-1} \cdot 0,14\text{m} = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ Js},$$

što je mnogo veće od h . Dakle klasična mehanika sasvim je dobra za zadani biljar.

Međutim, da se radilo o nekom biljaru iz atomskog svijeta, tada bi čestica bila elektron, njezina masa $m_e=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, a brzina, recimo, $v=4 \cdot 10^6 \text{ms}^{-1}$. Dulja stranica biljara bila bi na primjer $a=10^{-10}\text{m}$, te bi relacija neodređenosti glasila

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = 2mva = 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg} \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ms}^{-1} \cdot 10^{-10} \text{m} = 7,28 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

što je približno jednako h . U tom slučaju više ne smijemo primijeniti klasičnu, već kvantnu fiziku.

U temeljima kvantne fizike leži činjenica da se čestica u svijetu tako malih dimenzija očituje kao val. Zapravo, i u makrosvijetu i u mikrosvijetu svaka je čestica istodobno i val, jednako kao što svjetlost ima i čestične i valne osobine. Čestica koja se jednoliko giba prikazana je ravnim valom. (Da bismo zorno predočili ravni val, sjetit ćemo se kako smo ravni val na vodi proizveli pravilnim vertikalnim udaranjem ravne daske po vodenoj površini.)

Ako je čestica zarobljena u zatvorenom prostoru, tada je njezino stanje opisano stojnim valovima. Stojni val, na primjer, nastaje na žici glazbenog instrumenta, tako da se val koji putuje u jednom smjeru odbije na kraju žice, a taj odbijeni ili reflektirani val interferira s upadnim valom. Za određene brzine vala i valne duljine uspostavlja se stacionarno titranje žice koje nazivamo stojnim valom. Pri tome neke njezine točke uvijek miruju (to su čvorovi), a neke druge titraju s maksimalnim amplitudama (trbusi vala). Sve ono što se na žici zbiva u jednoj dimenziji, u kvantnom se biljaru zbiva u dvije dimenzije. Ravni val

upada na ravnu stranicu biljara okomito ili pod nekim kutom, te će se i odbiti okomito ili pod jednakim kutom. Međutim, kad rub biljara sadrži kutove ili zakrivljene plohe, nakon jedne ili više refleksija dolazi do složenih izobličenja početne jednostavne valne slike. Ipak, i tu se - za točno određene frekvencije - uspostavljaju stojni valovi. Sad umjesto odvojenih čvorova imamo cijele nizove čvornih točaka, tzv. čvorne linije, tj. mjesta na biljaru koja uopće ne titraju. Između njih su smješteni trbusi, točke koje titraju maksimalnim amplitudama.

Jednadžbe kvantne mehanike zapravo su valne jednadžbe. Pomoću te analogije proučavat ćemo kvantne biljare. Za točno rješenje moramo poznavati početne uvjete, te napokon dobivamo dvije vrste podataka. Prvi su valne funkcije, koje su analogija amplitudi titranja u klasičnoj fizici, a u kvantnoj predstavljaju vjerojatnost da će se mjerenjem naći čestica na nekom mjestu unutar biljara. Ta vjerojatnost je jednaka nuli na čvornim linijama. Rub biljara smatramo također čvornom linijom, tj. mjestom gdje je vjerojatnost nalaženja čestice minimalna. Pokazuje se da postoji izrazita razlika između regularnih i kaotičnih biljara[5]. Kod regularnih biljara čvorne se linije presijecaju. Kod kaotičnih biljara to su uvijene crte koje se ne sijeku. U slikama valnih funkcija mogu se uočiti tragovi ("ožiljci") klasičnih orbita[6].

Drugi niz podataka dobivenih računom su frekvencije za koje je stojni val moguć. Te su frekvencije najuže povezane s energijom čestice koju takav val opisuje. Budući da je riječ o diskretnome nizu pojedinačnih frekvencija, naša čestica u biljaru može poprimiti samo određene, kvantizirane vrijednosti energije. Na slici 9a vidimo niz energija, tipičan za regularne biljare. U njemu se na nekim energijama energijske razine grupiraju u skupine unutar kojih su razmaci mali. Drukčiji je spektar kaotičnog biljara (slika 9b). Tamo gotovo uopće nema sasvim malih razmaka, a energijska se stanja ponašaju kao da se zbog nečega međusobno odbijaju. Ovo ponašanje, tipično za kaotične biljare, uočeno je u spektrima atomske jezgre još pedesetih godina, u doba intenzivnih istraživanja nuklearnih reakcija. (Ako jezgru shvatimo kao jedan vrlo složeni trodimenzionalni biljar u kojem ima velik broj čestica, možemo reći da je to otkriće dalo prve eksperimentalne podatke o kvantnim biljarima.)

Kvantni biljari - eksperiment

Rezultate koje nam daje kvantna teorija biljara svakako bismo željeli provjeriti eksperimentom. Svaki oblik biljara ima svoje tipične čvorne linije i karakteristične energijske spektre. U želji da usporede teoriju s eksperimentom, fizičari su opet iskoristili analogiju klasičnog titranja dvodimenzionalne membrane i dvodimenzionalnog biljara.

Prvi je takav eksperiment bio poznat već prije dvjesto godina pod imenom Chladnijevih figura (slika 10). Kad se na kružnu membranu glazbenog instrumenta timpana naspe tamni prašak i udari se štapićem, opna titra na jedan od svojih karakterističnih načina. Neka mjesta titraju jako, to su trbusi, i odatle će se prašak razletjeti po prostoru. Na mjestima koja uopće ne titraju, čvornim linijama, prašak će ostati i tvoriti karakteristične likove (slika 10a). Slika 10b prikazuje rezultate teorije za kružni biljar[5] i može se usporediti s eksperimentom za kružnu membranu. Slika 10c prikazuje Chladnijeve figure za staklenu ploču u obliku “stadiona”, pobuđenu na titranje.

U novije vrijeme nastala je potraga i za drugim sustavima koji mogu titrati u dvije dimenzije. Na slici 11 prikazujemo nekoliko njih za biljar u obliku “stadiona”. Na slici 11a je interferencijska slika dobivena interferencijom ultrazvučnih valova. Na slici 11b je opna od sapunice razapeta na okvir zadanog oblika. Na slici 10c su rezultati mjerenja s mikrovalnim elektromagnetskim zračenjem u dvodimenzionalnoj šupljini. Sve su to makroskopski objekti, koji nam ipak daju egzaktnu predodžbu o tome da su teorijski izračunati rezultati eksperimentalno ostvarivi i da su zaključci jednih i drugih uzajamno u skladu.

Prekrivanje klasičnih i kvantnih zakonitosti - mezoskopska fizika

Klasična fizika vrijedi u svijetu predmeta većih od stotinke milimetra. Kvantna fizika vrijedi tamo gdje su objekti veliki desetak nanometara ili manji. A između tih dviju granica? Uzmemo li predmete veličine od $10\text{ }\mu\text{m}$ do 10 nm , dakle između 10^{-5} m i 10^{-8} m , hoće li za njih vrijediti kvantna ili klasična fizika? Naravno da vrijede obje, kao i za sve ostale predmete. No za sustave ovakvih dimenzija, ne možemo sa sigurnošću očekivati

samo klasične, čestične učinke, ili samo kvantne, valne pojave. Možemo očekivati i jedne i druge, i takva će se svojstva prekrivati i uzajamno nadopunjavati.

Sve donedavno nije bilo realističnih sustava takvih dimenzija. Oni su se pojavili razvitkom suvremene elektronike. Nakon vakuumskih cijevi većih od 10 cm izumljenih početkom ovog stoljeća, pedesetih godina došli su u upotrebu tranzistori, dimenzija nekoliko milimetara, a zatim su se pojavili integrirani krugovi u kojima su na podlogu naparivani tanki slojevi raznih poluvodičkih i drugih materijala. Danas smo svjedoci izrade sasvim malih elektroničkih elemenata, manjih od svega proizvedenog dosad. Govori se o “nanotehnologiji” i “nanouređajima”, a cijelo to područje fizike naziva se “mezoskopskom fizikom”. Proizvedeni su “clusteri” (nakupine) od svega nekoliko stotina ili desetaka atoma, tanki slojevi s nekoliko atomskih redova, i napokon “quantum dots”, kvantne točkice[7,8]. Kvantne točkice zapravo nisu ništa drugo no mali biljari nanometarskih dimenzija, u kojima se giba mali broj elektrona, svega nekoliko njih, i gdje se valna svojstva nadmeću sa čestičnima, a gibanje elektrona koji se sudara samo sa stijenkama udubine naziva se “balističkim režimom”. Da biste procijenili o kojim je dimenzijama i energijama riječ, riješite sljedeći zadatak.

 **Zadatak 2:** Kvantnu točkicu kružnog oblika, tj. minijaturni kružni biljar, u kojem ima deset elektrona, shvatite kao pločasti kondenzator. Promjer “ploče” iznosi 54 nm. Debljina poluvodičkog sloja je 8 nm, a relativna električna permitivnost poluvodiča $\epsilon_r = 12$. a) Izračunajte kapacitet tog “kondenzatora” i b) energiju potrebnu da bi se u taj biljar (kondenzator) ubacio još jedan elektron. c) Koliki napon moramo primijeniti za ubacivanje tog dodatnog elektrona u “kondenzator”? 

Kvantna točkica zapravo je mali umjetni atom u dvije dimenzije. Ona se u suvremenoj tehnologiji dobiva posebno prilagođenim urezivanjem (jetkanjem) ili naparivanjem na sloj sastavljen od poluvodičkih materijala. Moguća je i izrada takvih izbočina ili udubina u pravilnim razmacima, te se kao rezultat dobiva pravilna dvodimenzionalna rešetka. Tipični razmaci među točkicama u takvoj rešetci su oko 500 nm (slika 12). Gibanje čestice unutar takvih atoma ili oko njih prikazano je na slici 13. Sličnost s biljarima koje poznajemo više je nego očita. Ako se elektron giba unutar kružne granice (dota, “točkice”) (slika 13a), tada ima sva svojstva kružnog biljara. Ako se elektron giba izvan kruga (kružić se u takvoj

rešetki naziva “antidot” ili “antitočkica”), tad se zapravo radi o nizu Sinai-evih biljara, složenih poput rešetke (slika 13b). Na slici 13c je staza elektrona u rešetki antitočkica uz djelovanje magnetskog polja. Na slici 14 vidimo rešetku “antitočkica” uronjenu u magnetsko polje. Staze mogu biti pravilne kružnice manjih ili većih polumjera, ali i komplicirane kaotične spiralne crte. Klasično, riječ je o miješanom tipu biljara, o čemu svjedoči i Poincaréov presjek, prikazan na slici, u kojemu postoji regularno i kaotično područje. No istodobno, umjetni materijal koji smo dobili moramo razumijevati i kao kvantni sustav, jer je moguće mjeriti njegovu vodljivost i apsorpcijske spektre, kao što se odavno čini u fizici čvrstog stanja s prirodnim materijalima.

U području smo dakle gdje se klasična i kvantna svojstva istodobno opažaju i uzajamno nadopunjuju, te omogućuju razvitak sasvim novih dosad nezamislivih tehnoloških mogućnosti u elektronici i znanosti o materijalima. A klasična i kvantna fizika, umjesto da budu – kako se ponekad misli - suprotstavljene teorije između kojih je nepremostiv ponor, u stvarnosti se uzajamno prožimaju i upotpunjavaju, te otvaraju put razumijevanju sasvim nove vrste prirodnih pojava i zakona.

Literatura

- [1] M.V. Berry: *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard*, Eur. J. Phys. **2**, 91-102 (1981)
- [2] V. Lopac, I. Mrkonjić i D. Radić: *Classical and quantum chaos in the generalized parabolic lemon-shaped billiard*, Phys. Rev. **E59**, 303-311 (1999)
- [3] R.W. Robinett, C.E. Mulfinger i J. Passaneau: *Optical realization of a circular billiard*, The Physics Teacher **36**, 547-552 (1999)
- [4] C. Gmachl i sur.: *High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators*, Science **280**, 1493-1656 (1998)
- [5] D.L. Kaufman, I. Kosztin i K. Schulten: *Expansion method for stationary states of quantum billiards*, Am. J. Phys. **67**, 133-141 (1999)
- [6] E.C. Heller i S. Tomsovic: *Postmodern quantum mechanics*, Physics Today **46**, 38-46 (1993)
- [7] M.A. Reed: *Quantum dots*, Sci. Am. **January 1993**, 98-103 (1993)
- [8] D. Heitmann i J.P. Kotthaus: *The spectroscopy of quantum dot arrays*, Physics today, **June 1993**, 56-63 (1993)

Opisi slika

Slika 1: Gibanje čestice u dvodimenzionalnom biljaru

Slika 2: Gibanje čestice u pravokutnom i kružnom biljaru

Slika 3: Biljar oblika stadiona (a) sastoji se od dva polukruga, među koje je umetnut pravokutnik; Sinaijev biljar (b) ima pravokutni rub i kružnu prepreku u sredini

Slika 4: Regularne orbite u stadionu (a) i (b); regularna orbita u Sinaijevu biljaru (c); kaotična orbita u stadionu (d)

Slika 5: Regularne orbite u biljaru tipa limuna (a), (b) i (c); kaotična orbita u limunolikom biljaru (d)

Slika 6: Poincaréov presjek za miješani biljar oblika limuna s paraboličnim lukovima

Slika 7: Gibanje nabijene čestice u biljaru s magnetskim poljem

Slika 8: Pojačanje snage mikrolasera pomoću orbite tipa “leptir-kravate”

Slika 9: Energijska stanja u regularnom (a) i kaotičnom (b) biljaru. Strelice označuju zgusnute grupe stanja

Slika 10: Chladnijeve figure na kružnoj opni (a) i teorijsko predviđanje za kružni biljar (b); Chladnijeve figure na ploči oblika stadiona (c)

Slika 11: Stojni valovi dobiveni ultrazvučnim titrajima (a); na opni od sapunice (b); pomoću mikrovalnog zračenja (c), za rub oblika stadiona

Slika 12: Eksperimentalni nanouređaji povećani elektronskim mikroskopom

Slika 13: Rešetka “kvantnih točkica” (a) i “antitočkica” (b); gibanje elektrona među antitočkicama u magnetskom polju (c)

Slika 14: Regularne i kaotične staze elektrona među “antitočkicama” u magnetskom polju. Poincaréov presjek pokazuje miješano ponašanje.