

Od klasičnog do kvantnog Hall efekta

B. Šantić

Institut R. Bošković, P.P. 1016, HR-10000 Zagreb
santic@rudjer.irb.hr

Sažetak:

U članku je na popularan način opisan Hall efekt. Prvo se uvodi Lorentzova sila i na primjeru TV cijevi opisuje se njeno djelovanje. Detaljno je prikazan klasični Hallov efekt. Potom su prikazani ukratko fenomeni: cjelobrojni kvantni Hall efekt (QHE) i necjelobrojni kvantni Hall efekt (FQHE).

Istaknimo da je prošlogodišnja Nobelova nagrada za fiziku dodijeljena za istraživanje Hall efekta. Također, 1985. ta nagrada je dodijeljena za isto istraživanje.

Da bi mogli razumjeti kvantni Hall efekt potrebno je prvo proučiti ‘klasični’ Hall efekt. Ovdje klasičnim nazivamo modele koje možemo opisati jednačbama i bez poznavanja kvantne mehanike (KM). (Vidi Napomenu 1).

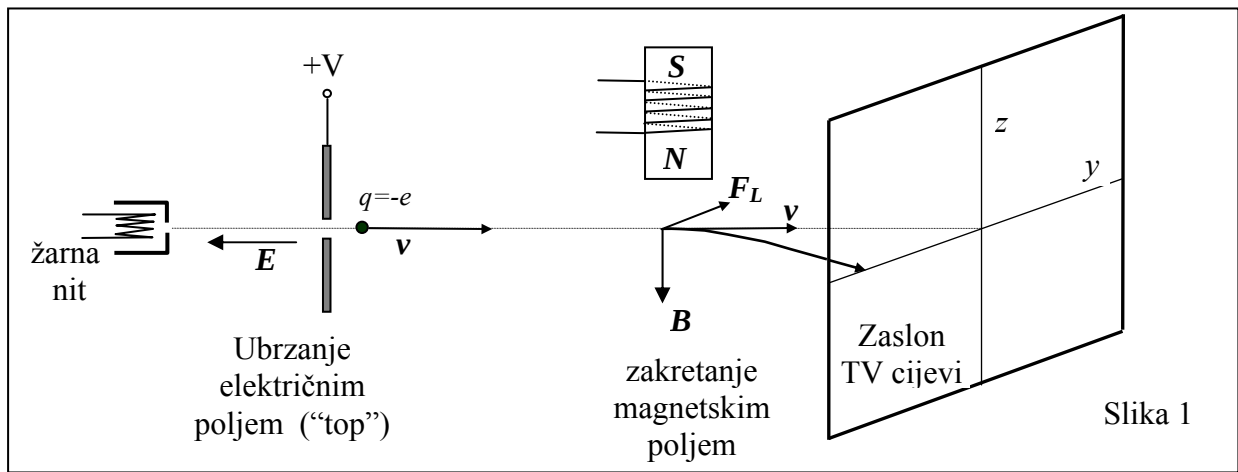
Lorentzova sila

Za objašnjenje Hall efekta treba poznavati djelovanje Lorentzove sile. S njenom praktičnom primjenom se susrećemo iznimno često. Gotovo svi ljudi svakodnevno i dugotrajno promatraju njeno djelovanje na zaslonu TV cijevi. To je ona “sila” koja na zaslonu računala prikazuje omiljene likove i okrutne borbe u raznim “igricama”. Navodno prosječan Amerikanac gleda televiziju po pet sati dnevno. Ako pak i na poslu radi s računalom, tada ukupno vrijeme praktične primjene te sile iznosi barem 10-15 sati dnevno.

Lorentzova sila $\mathbf{F}_L$, je sila koja djeluje na električni naboj q , koji se giba brzinom $\mathbf{v}$, u magnetskom polju $\mathbf{B}$, i/ili električnom polju $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{F}_L = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

Napomenimo da su s podebljanim slovima označene vektorske veličine. Lorentzova sila ima dva neovisna dijela: električni doprinos: $q \cdot \mathbf{E}$, i magnetski doprinos: $q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.



Ilustrirajmo to na primjeru TV cijevi, na slici 1.

U cijevi nema zraka. Iz žarne niti zbog užarenosti izleću elektroni i kroz rupicu ulaze u električno polje E , koje stvara anoda na potencijalu $+V$. Kroz rupu u anodi izleću elektroni brzine v , ubrzani električnom komponentom Lorentzove sile: $q \cdot E$. Govori se o “ispaljivanju” elektrona prema zaslonu, pa se taj dio cijevi naziva “top”.

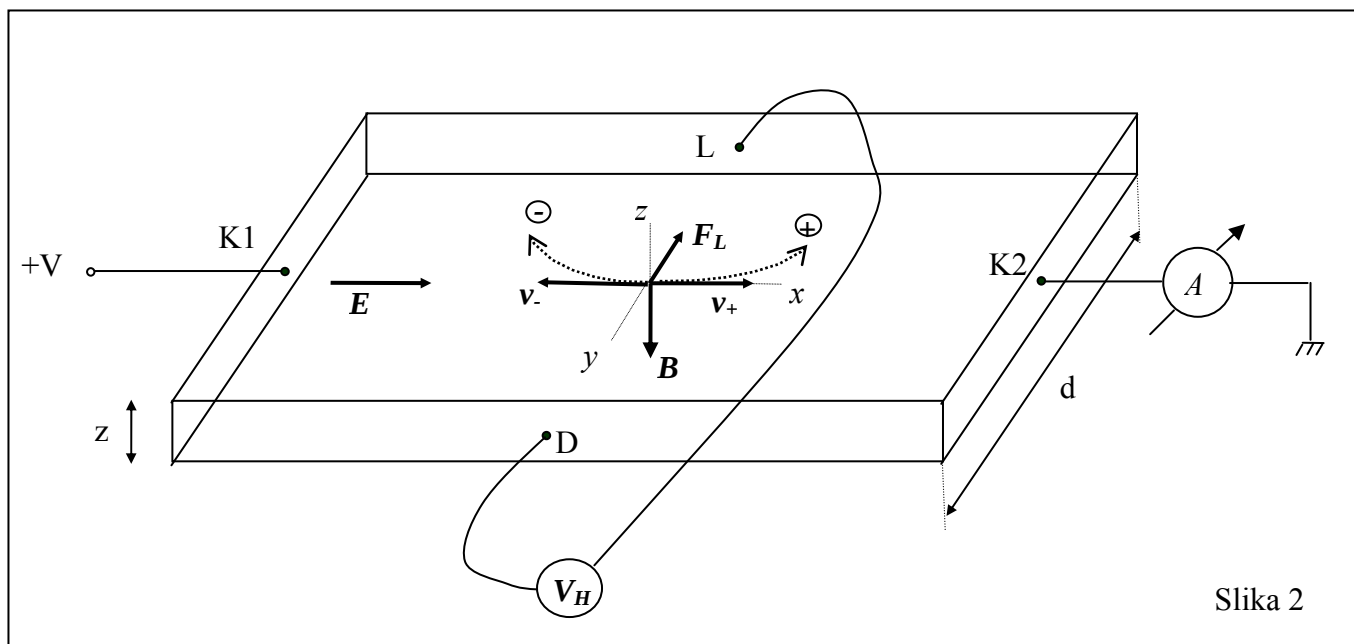
Potom elektroni ulaze u “otklonski sistem” koji tvori magnetsko polje, dobiveno zavojnicom s vanjske strane cijevi. Smjer magnetskog polja je okomit na smjer brzine elektrona. Magnetska komponenta Lorentzove sile, djeluje okomito na oba vektora: i na vektor brzine v i na vektor B . Uočimo vektorski umnožak: $v \times B$. Zbog negativnog naboja elektrona $q_e = -e$, elektronki snop skreće “na desno”. Pozitivno nabijene čestice bi skretale u smjeru $v \times B$, tj. “na lijevo”, u smjeru F_L .

Dodavanjem još jednog magnetskog polja u horizontalnom smjeru y , mogu se elektroni dodatno zakretati i u z smjeru. Mijenjanjem jačine i smjerova polja može se elektronski snop zakrenuti ka svim točkama zaslona. Na mjestu udara elektrona u zaslon javlja se svjetlo, jer je s unutrašnje strane nanesen fosforecentni sloj.

Brzim prekidanjima snopa i njegovim pomicanjima po zaslonu moguće je stvoriti slike, a uz dodatnu pomoć računala moguće je obaviti razne poslove, prikazati te obrađivati tekst i/ili slike, zaraditi plaću, te opčiniti ljude svih uzrasta i oduzeti im puno, jako puno vremena.

Klasični Hall efekt

E.H. Hall je 1879. proučavao djelovanje magnetskog polja na vodič. Ustanovio je da se na bočnim stranicama metalnog uzorka javlja napon, tzv. Hallov napon. Principijelna šema je prikazana na slici 2. Lorentzova sila je ključna u objašnjenju Hall efekta.



Slika 2

Vanjski napon $+V$, stvara između kontaktnih ploha K1 i K2 električno polje E . Brzina pozitivnog v_+ , i brzina negativnog nosioca naboja v_- , su suprotnog smjera. Budući da im je i naboj suprotan, magnetski dio Lorentzove sile ($q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) ih skreće na istu stranu, označeno crtkano, prema plohi L. Na bočnoj stranici L gomila se dakle višak nosilaca naboja, i tako nastaje tzv. Hallovo polje duž osi y , koje se protivi nagomilavanju dodatnih nosilaca naboja. Između kontakata L i D možemo izmjeriti tzv. Hallov napon. Uočimo odmah važnu posljedicu da predznak napona L kontakta ovisi o predznaku nosilaca naboja.

Detaljan izvod izraza za Hallov napon je prikazan u Dodatku 1, gdje je pokazano da je:

$$V_H = 1/(qn) \cdot I/z \cdot B$$

Zašto nam je ta relacija važna? Mjerenjem 4 lako mjerljive veličine: V_H , B , I i z , dobivamo umnožak $q \cdot n$ (za elektrone je $q = -e$). Dakle, mjerenjem Hallovog napona možemo odrediti koncentraciju nosilaca naboja n , a iz predznaka napona i *tip* nosilaca: pozitivni ili negativni. Zbog dobivanja ta dva važna podatka mjerenje Hallovog efekta je danas nezaobilazna i važna eksperimentalna tehnika, naročito u fizici poluvodiča.

Velika je povijesna uloga ovog efekta, jer je E.H.Hall 1879. mjereći Hallov napon ustanovio je da je L kontakt negativan, tj. da su se na toj plohi nakupili negativni nosioci naboja. To je bilo suprotno očekivanju. Naivno se pretpostavljalo se priroda ponaša u skladu s dogovorom što je pozitivno a što negativno, dakle da struju prenose “pozitivne” čestice.

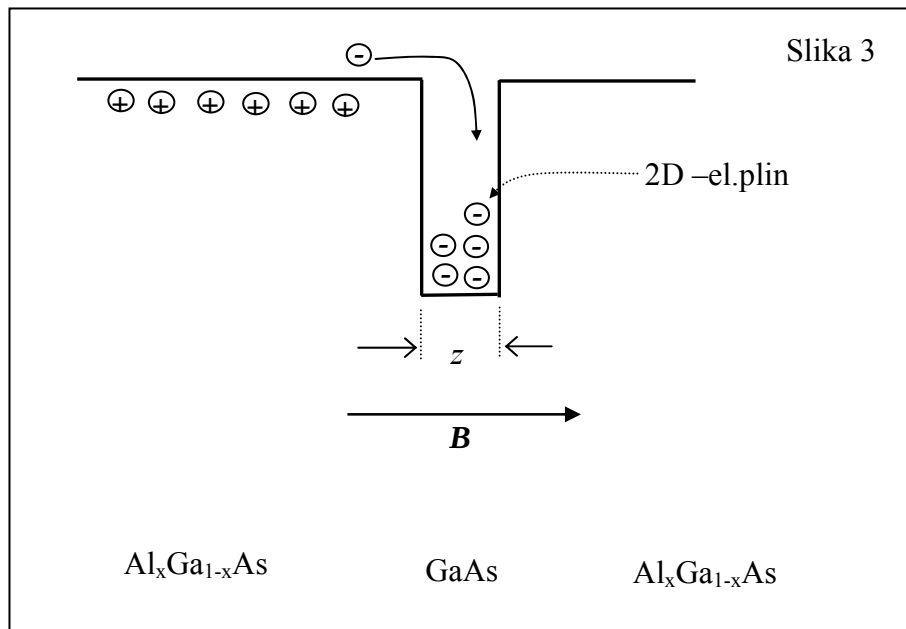
Kvantni Hall efekt

Do ovdje je sve, barem prividno, izgledalo klasično i “pitomo”, jer smo se mogli osloniti i na naše “zorne predodžbe”. Na primjer, kad netko koristi svakodnevno pojam *zonske strukture*, tada mu se to ne čini kompliciranim ni teškim. Gotovo da bi se moglo reći da imamo dosta “zornu” i realnu “sliku” takve strukture, odnosno modela. Ipak, i iskusne fizičare može “zor” prevariti, tj. eksperimentalni rezultati mogu neobično iznenaditi. Kvantni Hall efekt je jedna od takvih pojava.

Postoje, uvjetno govoreći, dva kvantna Hall efekta. Prvo je K.V.Klitzing otkrio “*cjelobrojni* kvantni Hall efekt”, koji je objašnjen relativno jednostavno. I kad se da je sve izgledalo jasno, slučajno je otkriven “*nećjelobrojni* kvantni Hall efekt”, kojeg je puno teže objasniti. Ta su istraživanja nagrađena s dvije Nobelove nagrade, 1985. i 1998.

Dvodimenzionalni elektronski plin

Za mjerenje kvantnog Hall efekta (QHE) bitan je napredak u tehnologiji poluvodiča. Naime QHE se opaža u vrlo specijalnim uzorcima. U njima su slobodni elektroni “smješteni” u vrlo tankom sloju, paralelnom s površinom uzorka. Mogu se gibati “lijevo i desno” ali ne i “vertikalno” (z smjer). Zato govorimo o dvodimenzionalnom (2D) elektronskom plinu.



Energetski dijagram takve strukture je prikazana šematski na slici 3.

U posebnim se uređajima rastu slojevi materijala $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ različitog sastava (različiti parametar x), te se napravi “sendvič” struktura kao na slici. Simbol $\oplus$ predstavlja ione primjesa (dopanda) koji se namjerno dodaju u sloj $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. Naime namjerno dodani atom (npr. silicij) lako “otpušta” jedan svoj elektron koji se onda slobodno može gibati po kristalu. Zbog različite širine *zabranjenog energijskog procjepa*, sloj GaAs se ponaša kao potencijalna jama za elektrone. Debljina sloja-jame je iznimna mala, npr. nekoliko nanometara, pa se zato elektroni praktički ne mogu gibati u z smjeru. Ali u smjerovima x i y (“bočno”) gibaju se vrlo lako. Zapravo iznimno lako, kaže se *pokretljivo*, jer su i fizički odvojeni od iona od kojih su potekli. Naime kad elektron naiđe na nepokretan ion, njegova se putanja jako mijenja zbog električnog međudjelovanja s ionom. Kaže se da ioni “raspršuju” elektrone, i u tome su vrlo djelotvorni, naročito na niskim temperaturama jer su tada elektroni vrlo spori. To je dodatni razlog zašto se elektroni smještaju u “jamu”, jer se u njoj mogu puno pokretljivije gibati budući da su razdvojeni od iona od kojih su potekli.

Izraz za Hallov napon na uzorku 2D elektronskog plina (vidi Dodatak 1) glasi:

$$V_H = 1/(qn_{\square}) \cdot I \cdot B$$

gdje je $n_{\square}$ je plošna koncentracija nosilaca $n_{\square} = \Delta N / \Delta S$ (broj nosilaca po jedinici površine)

Budući da smo se riješili debljine (z) u formuli za V_H , možemo jednostavno uvesti i tzv.

Hallov otpor R_H :

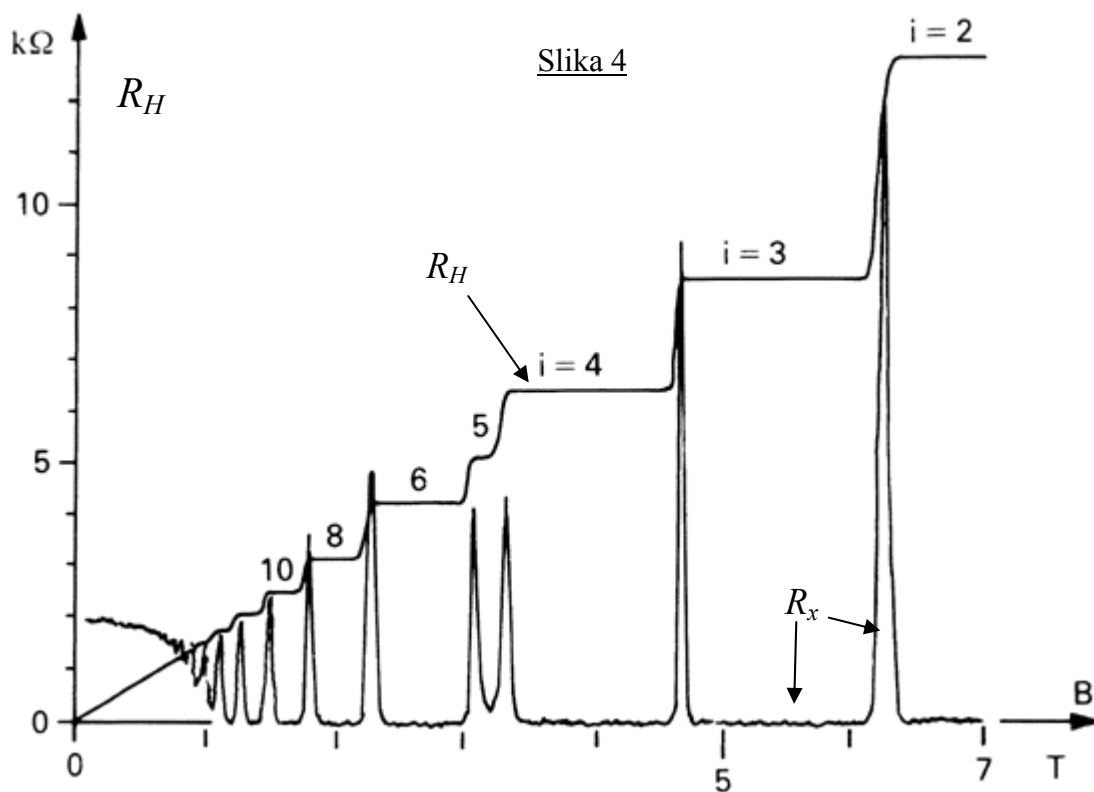
$$R_H = V_H / I = 1/(qn_{\square}) \cdot B$$

[Oprez, u pravilu se koristi ista oznaka i za Hallov otpor R_H , i za Hallovu konstantu R_H , ali je značenje različito. No, budući da je Hallova konstanta uglavnom od povijesnog značenja, ne navodi se kao rezultat, pa je opasnost zabune mala. (Vidi Dodatak 1)]

Relacija za Hallov otpor R_H je vrlo jednostavna i jasna. Veli da R_H raste linearno s porastom magnetskog polja. Napomenimo da se obično mjeri V_H uz stalnu struju I , a povećava se B .

No 1980., mjereći Hallov napon na 2D elektronskom plinu, Von Klitzing dobio sasvim neočekivani rezultat. Za velike vrijednosti B , Hallov otpor R_H nije rastao linearno s B . Pokazivao je niz stepenica (platoa), slika 4.

Osim toga i longitudinalni otpor R_x je nastajao i javljao se (=otpor duž uzorka, između kontakata K1 i K2 na principijelnoj(!) Slici 1). Ponašanje dva otpora je usklađeno: Kad Hallov otpor pokaže stepenicu, longitudinalni otpor gotovo nestaje.



Pored neobičnih stepenica ustanovljena je još jedna važna činjenica. Stepenice Hallovog otpora su bile točno kvantizirane! Naime njihove vrijednosti su bile neovisne o uzorku i poprimale je uvijek vrijednosti koje se dobiju dijeljenjem točno definiranog otpora:

$$25813 \, \Omega = 1 \text{ wKlitzing} = h/e^2$$

s cijelim brojem i . (h je Planckova konstanta a e je naboj elektrona).

Dakle, stepenice se mogu opisati formulom:

$$R_{H,i} = 1 \text{ Klitzing} / i = (h/e^2) / i$$

Zbog te kvantizacije cijelim brojem efekt je nazvan cjelobrojni kvantni Hall efekt.

Pokazalo se da se otpor: $h/e^2 = 25813 \, \Omega = 1 \text{ Klitzing}$, (nazvan po otkrivaču) može mjeriti vrlo točno, pa se danas koristi kao standard za definiranje električnog otpora. Primjetimo da je otpor 1 *Klitzing* definiran samo uz pomoć osnovnih prirodnih konstanti (e i h).

Da bi objasnili QHE moramo usvesti pojmove ciklotronske frekvencije, kvantizacije i Landau nivoa.

Ciklotronska frekvencija

Vratimo se ponovo na TV cijev. Vidjeli smo da elektroni zakreću “bočno” kad uđu u magnetsko polje. No to “zakretanje u stranu” je stalno, tj. nakon što su se malo zakrenu od početnog smjera, B ih i dalje zakreće, sada u drugi bočni smjer, itd. Dobivamo kružno gibanje.

Ako se elektron giba kružno tada je Lorenzova sila izjednačena s centrifugalnom silom:

$$q v B = \omega m v$$

gdje je ω tzv. kutna brzina (ili *kutna frekvencija*), ω =(promjena kuta radijus vektora u jedinici vremena). [Podsjetimo da je ω povezana sa “običnom” frekvencijom f (=broj punih “okreta” u sekundi) relacijom $\omega = 2\pi f$.]

Dakle, za elektrone ($|q|=e$) dobivamo kutnu frekvenciju ω_c koja se naziva *ciklotronska frekvencija*:

$$\omega_c = eB/m$$

Primjetimo da ω_c ovisi samo o B . [Radijus kruženja r , dobijemo ako se sjetimo relacije: (obodna brzina)=(kutna frekv.) $\times$ (radius), tj. $v = \omega r$, ovdje : $v = \omega_c r$.] Dakle svi elektroni imaju jednaku kutnu brzinu, iako različite obodne brzine (različiti radijusi kruženja).

U TV cijevi su područja djelovanja električnog i magnetskog polja razdvojena. Ako imamo kombinaciju električnog $\mathbf{E}$, i njemu okomitog magnetskog polja $\mathbf{B}$, tada imamo složeno gibanje. Zbog $\mathbf{B}$ imamo kruženje a zbog $\mathbf{E}$ pomak centra kružnice po pravcu. Putanja izgleda kao “spljoštena” spirala - *cikloida*., a njen smjer je okomit na oba polja.

Kvantizacija

U fiziku je pojamove *kvant* i *kvantizacija* uveo Planck 1905. da bi objasnio zračenje crnog tijela. Pretpostavio je da oscilator može primati i emitirati energiju samo u “kvantiziranom” obliku, tj. u fiksnim obrocima. Teško je naći klasičnu analogiju za taj pojam. Npr. to bi bilo kao da ja želim smršaviti, ali mogu gubiti samo u “kvantima” tj. “obrocima” od po, npr. jedan kilogram, ne manje od toga. Isto tako ako se želim udebljati mogu dobiti najmanje barem jedan kvant mase (kilogram) ali ne manje od toga.

Tako oscilator može imati ukupnu energiju danu kao zbroj kvanata, dakle:

$$E = k \times (\text{kvant energije})$$

k je cijeli broj.

Koliki je taj kvant (obrok) energije. Pokazalo se da energija oscilatora ovisi isključivo o frekvenciji. Što je frekvencija veća to je veća i energija. Konstanta proporcionalnosti je Planckova konstanta h . Dakle

$$E_\omega = (\text{kvant energije za oscilator frekvije } \omega) = hf = \omega \cdot h/2\pi$$

Dakle oscilator se može energetski “udebljati” (apsorbirati) ili “smršaviti” (izgubiti emisijom) samo po jedan kvant – obrok energije E_ω

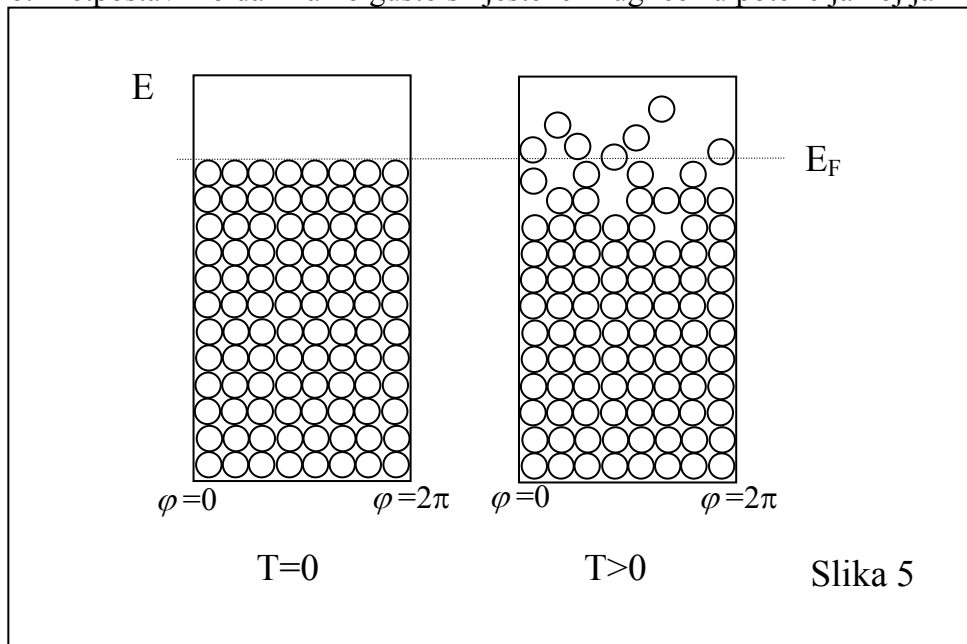
Ukupna energija je dakle dana kao $k \times (\text{osnovni obrok} = \text{kvant energije})$.

$$E_k = k \cdot E_\omega = k \cdot \omega \cdot h/2\pi$$

[Zapravo bi trebalo zamijeniti k s $(k+1/2)$, ali to ovdje nije važno].

Energetska raspodjela gustog elektronskog plina

Na slici 3 smo slikovito prikazali elektrone kao kuglice koje se gomilaju u energetske jami. Naivnim crtanjem loptica zaključujemo da u prostor gdje se nalazi već jedan elektron ne možemo smjestiti drugi. Zapravo bi trebalo uvesti pojam *distribucija* i *fazni prostor* ali je to ovdje svakako prezahtjevno. Pretpostavimo da imamo gusto smještene “kuglice” u potencijalnoj jami, slika 5.



Kuglice nam predstavljaju elektrone u potencijalnoj jami, a predstavljanje “kuglicama” opisujemo nemogućnost da istovremeno budu dva elektrona na istom “mjestu”. Veličina same kuglice je određena Heisenbergovom *relacijom neodređenosti*. “Visinski” položaj kuglice određuje njenu energiju. Neka horizontalni položaj u kutiji φ , opisuje smjer (kut= $0-2\pi$) gibanja u 2D plinu. Ako je temperatura $T \approx 0$, sve se kuglice slegnu, “sabiju” prema dolje, jer idu u stanja niže

energije. Iznad neke energije, naziva se *Fermijeva energija* E_F , nema kuglica, a ispod su popunjena sva mjesta (*stanja u faznom prostoru*). Kuglica koja se “prelije” preko E_F je važna za vodljivost, jer samo se ona može dalje premještati, samo ona može napredovati prema “gore”, tj. dobivati energiju i mijenjati smjer.

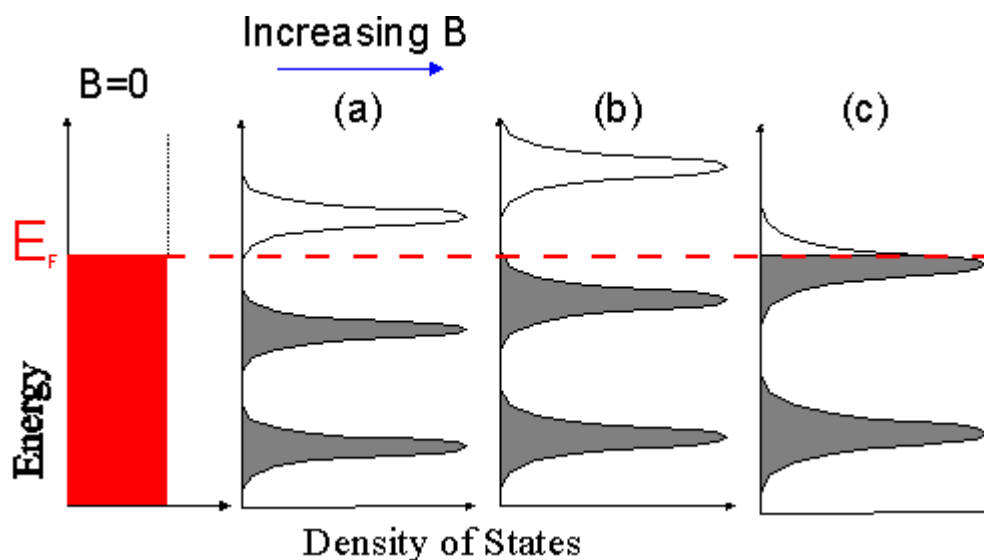
Na konačnoj temperaturi ($T>0$) kuglice titraju, kako to pretpostavlja/objašnjava *kinetička teorija topline*. Donje kuglice se ne mogu premještati jer “nemaju kud”. No u nekoliko najgornjih redova kuglice se mogu dizati, skakutati na više energije, oko E_F . Tako se oko E_F pojavljuju slobodna “stanja” tj mjesta koja nisu zauzeta. Ako pak sada “gurnemo” kuglice moguće je kod najgornjih primjetiti premještanje sa jednog na drugo mjesto (stanje) što zapravo znači promjenu parametara: energije i/ili smjera. Govorimo o *raspršenju* nosilaca naboja. Vidimo da je za postojanje raspršenja bitno i da bude “praznog mjesta” (*slobodnih stanja*) ali i da oko tih praznim stanja imamo i kuglica na raspolaganju. Zašto se kuglice uopće raspršuju, tj. zašto im se jednostavno svima ne povećava energija usljed gibanja? Razlozi za raspršenje su brojni. Na visokim temperaturama to je titranje kristalne rešetke. Na niskim temperaturama glavni centri raspršenja su ioni zbog jakog električnog djelovanja na elektrone.

[Napomena: Primjetimo da je za vodljivost u svakom slučaju važno da ne napunimo “kutiju” do vrha, jer tada nema “premještanja” a time niti vodljivosti. Popunjena kutija opisuje tzv. *valentnu zonu* na $T=0$. (U 3D slučaju kutija je malo promijenjena ali ideje su iste.) Ako bi svi elektroni u kristalu bili raspodijeljeni samo u punim *zonama* –kutijama, tada bi to predstavljalo izolator.]

Landau nivoi

To su elektronski energetske nivoi, koji nastaju kvantizacijom ciklotronske rotacije elektrona. Nazvani po ruskom fizičaru Landau. Naime vidjeli smo da se elektroni gibaju po kružnim putanjama, zapravo jedna komponenta gibanja je kružna. Ali to je također i oscilatorno gibanje. Imamo zapravo 2-dimanezionalne oscilacije. Dakle energija gibanja/kruženja je kvantizirana u skladu s Planckovom hipotezom:

$$E_k = k \cdot \omega_c \cdot h/2\pi = (\text{zapravo, potpunije i točnije}) = (k+1/2) \cdot \omega_c \cdot h/2\pi$$



Ta kvantizacija dovodi do promjene raspodjele elektronskih stanja –“kuglica” na slici 5. To je prikazano na slici 6. Uočimo da je na osi x , sada gustoća stanja-kuglica.

Elektronska stanja se preraspodjeljuju-grupiraju u Landau nivoe. Nivoi su prošireni zbog raspršenja. Na niskoj temp. i za mali B , opet nema vodljivosti jer su kuglice gusto sabijene, sada na “katovima”- Landau nivoima. Katovi nisu stalne visine, niti stalne napučenosti. Rastu (energetski) i šire se se porastom B . Razmak između nivoa – određuje visinu “kata”:

$$\omega_c \cdot h/2\pi = eB/m \cdot h/2\pi$$

Sada možemo objasniti stepenice u Hallovom otporu i longitudinalnom otporu. Svaki puta kad se Fermijev nivo E_F nalazi između dva Landau nivoa imamo stepenicu za R_H i zanemarivo mali longitudinalni otpor R_x , jer slikovito govoreći imamo malo raspršenja - kuglice se ne mogu premještati - *preraspodjeljivati po stanjima*. Slikovito gledajući, primjetimo da je raspršenje važno i za Hallov napon, jer bi bez ikakvog raspršenja elektroni išli po cikloidama od jednog do drugog bočnog kraja uzorka, jer se sada (niske temperature i jaka polja) ne gibaju samo u poluluku prema bočnim stranicama.

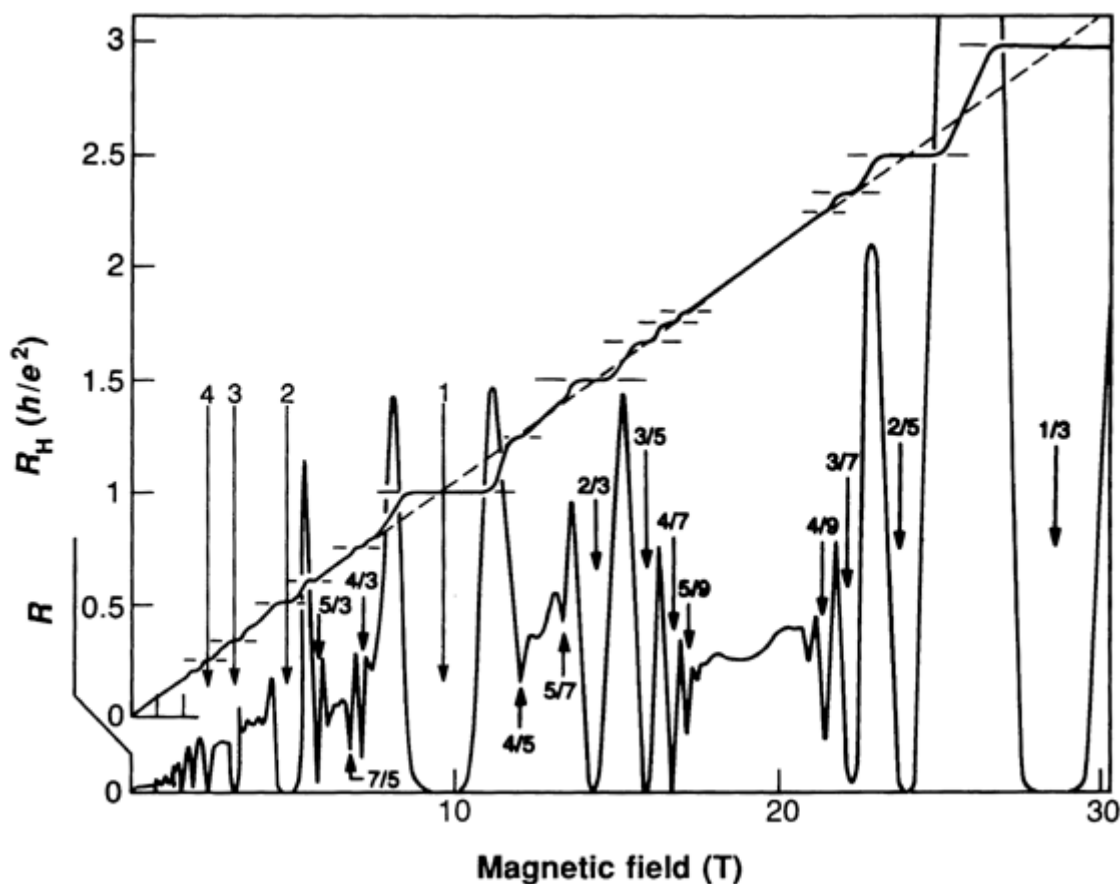
Postoji i dosta problema. Spomenimo da npr. nije lako sintetizirati dovoljno dobar uzorak. Utjecaj nečistoća i defekata nije lako ustanoviti. Širina stepenica nije ista u raznim uzorcima.

Necjelobrojni kvantni Hall efekt

I kad je sve izgledalo barem donekle riješeno i shvaćeno, pojavili su se novi problemi. Naime, cjelobrojni kvantni Hall ne predviđa pojavljivanje drugih stepenica. Predviđene su samo cjelobrojne stepenice zbog prelazaka raznih Landau nivoa preko Fermijevog nivoa. Ali nedugo potom, opaženo je da u nekim specijalnim uzorcima dolazi do pojave dodatnih, "necjelobrojnih" stepenica. Zapravo slučajno, u nastojanju da ispituju neke druge fenomene, H. Sörmer i D.C. Tsui su otkrili necjelobrojni (frakcionalni) kvantni Hall efekt (FQHE). Korištenjem uzorka s velikom pokretljivošću nosilaca, na vrlo niskim temperaturama ($T \ll 1\text{K}$) i u vrlo jakim poljima (B do 30T), otkrili su pojavu stepenica i za necjelobrojne vrijednosti $\tilde{i}$. Slika 7. (Smisao-značenje krivulja je isto kao na slici 4)

Dakle, u ovom slučaju se broj $\tilde{i}$ dao izraziti kao omjer dvaju cijelih brojeva $\tilde{i} = p/q$, tj. kao razlomak. Odnosno stepenice R_H su bile određene kao

$$R_H = (h/e^2) / \tilde{i}$$



Na slici su navedene razne vrijednosti broja $\tilde{i}$. Prvotno je teorija predviđala da je u izrazu $\tilde{i} = p/q$ broj q neparan (kao na slici). Potom je, opet s iznenađenjem, otkriveno da q može biti paran, iako rijetko.

Objašnjenje za FQHE nije jednostavno. Nedugo po eksperimentalnom otkriću R.B. Laughlin je ponudio teorijsko objašnjenje. Elektroni se ponašaju kao posebna vrsta nestlačive “kvantne tekućine”. Pretpostavio je poseban oblik *valne funkcije* [elektroni se u kristalu ponašaju kao valovi] koji je uključivao djelovanje svakog elektrona s ostalim elektronima. Tada se ponašanje elektrona moglo opisati kao gibanje kvazičestica necjelobrojnog naboja. Drugim riječima, kolektivno međudjelovanje elektrona se može opisati uvođenjem kvazičestica necjelobrojnog naboja. To dovodi i do necjelobrojne vrijednosti $\tilde{\nu}$ parametra (vidi Napomenu 3).

Za ta je otkrića dodijeljena Nobelova nagrada iz fizike 1998.

Primjena

Postoji tip ljudi koji će uvijek upitati “a čemu sve to? ili zašto ispitivati pojave koje ionako nemaju nikakvu praktičnu primjenu?”. Naime, mjerenja QHE se izvode na iznimno niskim temperaturama i u vrlo jakim poljima, potrebna je iznimno skupa oprema i za sada ne vidimo direktnu praktičnu primjenu QHE. Netko će odgovoriti protupitanjem, zašto uopće nešto objašnjavati “tim ljudima” koje zanima samo praktična primjena, kad je stvar tako zanimljiva “sama po sebi”. Razloga za objašnjavanje i popularizaciju ipak ima, jer, nažalost (ili nasreću?) “ti ljudi” obično raspodjeljuju novac za istraživanja. Ipak, osim spoznavanja osnovnih zakonitosti prirode, postoji i velika posredna praktična korist. Naime tehnološka primjena 2D elektronskog plina i raznih unapređenja, razvijenih pri rastu uzoraka, dovela su do upotrebe niza novih elektroničkih komponenti. Tako naprimjer, kad u ruci držimo “mobitel” treba znati da se u njemu nalaze dijelovi zasnovani na ispitivanju i korištenju 2D struktura (slične je prikazana na slici 5). Predviđaju se i mnoge daljnje primjene. (Vidi Napomenu 2).

NAPOMENE I IZVODI:

Opća Napomena: Članak nije prošao dovoljno kritičkog čitanja, a nije niti lektoriran. To će biti popravljeno u slijedećoj verziji.

Napomena 1 O konceptualnim problemima: Pri pisanju i koncipiranju članka autor se susreo s dva protuslovna zahtjeva. Prvo, izložiti i objasniti neke ideje i/ili modele kvantne mehanike (KM), te na primjeru Hall efekta doći do samih granica nekih područja fizike čvrstog stanja. Drugo, izlaganje treba biti razumljivo i zanimljivo učenicima srednjih i osnovnih škola, koji nemaju dovoljno predznanja iz kvantne fizike. Traženje kompromisa između ta dva vrlo oprečna zahtjeva, bitno je odredilo i izložene teme i pristup problemu. Stoga su ovdje korišteni i neki naivni fenomenološki modeli i krajnja pojednostavljenja. Svrha ovog članka nije podučiti kvantnu mehaniku, već samo ilustrirati neka od aktualnih istraživanja.

Napomena 2 Zašto popularizirati kvantnu mehaniku unatoč njenoj kompliciranosti: Da je kvantna mehanika (KM) “težak” i zahtjevan predmet dakazuje i činjenica da i sami fizičari počinju sa sustavnim učenjem tek na trećoj godini studija. Pri tome postoje barem dvije velike prepreke. Prvo, pomanjkanje svakodnevnog iskustva s kvantnim objektima. Na primjer, ne znamo kako “izgleda” elektron. Drugo, matematički aparat koji se koristi za opis kvantnih fenomena je iznimno zahtjevan. Ipak, savladavanje ta dva problema i izgradnja novog načina mišljenja bitno mijenjaju poimanje fizikalne realnosti. Ali mijenjaju i našu svakodnevnicu. Zašto je KM uopće važna u svakodnevnom životu? Spomenimo dvije primjene s kojima se susrećemo u svom domu: razni poluvodički elektronski uređaji (radio i TV prijemnici, CD-playeri, svijetleće diode, mobilna telefonija...) i lijekovi (kvantna kemija). Dakle, iz samo dva primjera slijedi da je s primjenom KM surećemo iznimno često, iako to nije očigledno.

Napomena 3 Napomenimo na kraju da, iako glavni problemi FQHE izgledaju riješeni, svi detalji i posljedice još uvijek nisu bez iznenađenja i na tom se području još uvijek intenzivno radi. Tako na primjer, u *Physics Today December 1998*, na strani 17 imamo prikaz B.Schwarzschilda o Nobelovoj nagradi tj. o FQHE. No nekoliko stranica potom (strana 22) B.GossLevi opisuje aktualne probleme i zagonetke.

Dodatak 1: Izvod relacije za klasični Hallov napon (netipičan, detaljan i pojednostavljen)

Izvedimo osnovne relacije za Hall efekt, tj. konačni cilj je naći vezu između eksperimentalno mjerljivih veličina (I, V, B, V_H) i dimenzija uzorka. Slika 2. Pri tom zaboravimo na tren vektorsku notaciju jer smo odredili smjerove, a interesira nas odnos među veličinama.

Sjetimo se da je razlika potencijala (tj. napon) dana integralom polja po putu, odnosno, u jednostanom slučaju:

$$\text{napon} = \text{polje} \times \text{udaljenost.}$$

u našem slučaju, na primjer:

$$V_H = E_H \cdot d$$

E_H je takozvano Hallovo polje u y smjeru koje stvaraju nagomilani nosioci.

Sjetimo se također da su sila na naboj i električno polje povezani relacijom:

$$\text{Sila} = \text{polje} \times \text{naboj}$$

Tzv. Hallovo polje daje silu na naboj u y smjeru je dakle:

$$F_H = q \cdot E_H = q \cdot V_H / d$$

Nagomilavanje naboja skretanjem u magnetskom polju prestaje kad ta tzv. Hallova sila izjednači Lorentzovu silu $F_L = qvB$, dakle:

$$qvB = q \cdot V_H / d$$

odnosno

$$V_H = v \cdot B \cdot d$$

Jedino nam još preostaje izraziti brzinu nosilaca preko neke eksperimentalno mjerljive veličine. Podsjetimo se definicije da je struja I , ukupna količina naboja koja prođe kroz uzorak u jedinici vremena. $I = \Delta Q / \Delta t$. Važno je i koliki je presjek uzorka kroz koji teče struja I . To je opisano gustoćom struje $\mathbf{j}$, određenom s $\mathbf{j} = I / \Delta S$, odnosno: $\mathbf{j} = \Delta Q / \Delta t \Delta S$, gdje ΔS promatrana površina.

Smjer vektora $\mathbf{j}$ određuje smjer brzine nosilaca. Pretpostavimo da imamo jednoliku gustoću nosilaca po volumenu $n = \Delta N / \Delta V$. Pretpostavimo da se svi gibaju brzinom $\mathbf{v}$ kroz plohu ΔS . Tada u jedinici vremena prođe broj čestica: $\Delta N = n \cdot \Delta V = n \cdot (\mathbf{v} \Delta t \cdot \Delta S)$. Svaka čestica ima naboj q , dakle ukupni naboj koji pređe plohom ΔS je $\Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot (\mathbf{v} \Delta t \cdot \Delta S)$.

Dakle, uvrštavanjem u prethodni izraz $\mathbf{j} = \Delta Q / \Delta t \Delta S$, dobivamo: $\mathbf{j} = q \cdot n \cdot \mathbf{v}$.

Slijedi da je $v = j / qn$, što uvršteno u izraz za V_H daje:

$$V_H = 1/(qn) \cdot j \cdot B \cdot d$$

a uz $j = I / (z \cdot d)$ konačno:

$$V_H = 1/(qn) \cdot I / z \cdot B$$

Na kraju izvoda spomenimo: Uobičajeno se uvodi i tzv. Hallova konstanta R_H , “definicijom” $E_H = R_H j \cdot B$, pa se onda “izvođenjem” pokazuje da je:

$$R_H = 1/(q \cdot n)$$

Vidjeli smo da zapravo to nije nužno. Vjerojatni razlog uvođenja Hallove konstante je povijesne prirode. Podsjetimo se da prije 120 godina elektron nije bio otkriven. Otkrio ga je J.J. Thomson 1895., a naboj mu je izmjerio tek 16 godina potom R.A. Miliken (1909.). Dakle E.H. Hall nije mogao određivati koncentraciju nosilaca. Ipak, pojam Hallove konstante se očuvao do naših dana. No, naročito u fizici poluvodiča, isključivo se iskazuje koncentracija nosilaca kao rezultat mjerenja.

Uočimo da smo razmatrali najjednostavniji slučaj. Uzimanjem u obzir raspodjele naboja po brzinama, suprotno naivnoj pretpostavci da se baš svi nosioci gibaju jednom te istom brzinom, dobiva se malo promijenjeni izraz za V_H , ali se glavni zaključci ne mijenjaju pa se dobivene korekcije često zanemaruju. Također, sve daljnje komplikacije (npr. “mješane” vodljivosti i ostale) se ovdje ne razmatraju.

U slučaju 2D elektronskog plina, primjetimo da gornja jednadžba za Hallov $V_H = 1/(qn) \cdot I / z \cdot B$ vrijedi za uzorak debljine z . No u 2D uzorcima, prostorna koncentracija je zamijenjena plošnom. Najjednostavnije je uočiti da je volumna koncentracija $n = \Delta N / \Delta V = \Delta N / (\Delta S \cdot z)$ i to uvrstiti u izraz za V_H . Dimenzija z se tada pokрати. Tada dobivamo vrlo jednostavan izraz.

$$V_H = 1/(qn_{\square}) \cdot I \cdot B$$

gdje je $n_{\square}$ je plošna koncentracija nosilaca $n_{\square} = \Delta N / \Delta S$. Primjetimo da jedino ta veličina ima praktičnog smisla, jer često ne znamo točnu debljinu potencijalne jame.

Opaska: Inače bi relaciju za V_H u 2D slučaju, mogli izvesti pretpostavljajući da je plošna gustoća struje $j_{\square} = \Delta Q / \Delta t \Delta l$, tj. količina naboja koja u nekom vremenu pređe preko neke crte Δl . Potom treba izjednačiti Hallovo polje s Lorentzovim, itd...

LITERATURA:

O KVANTNOJ FIZICI postoji vrlo obimna literatura, no za laike je u pravilu nepristupačna i stoga nekorisna. Ipak, prevedene su dvije odlične knjige. Osim srednjoškolcima, interesantne su i studentima jer razmatraju ključne ideje, ali i niz povijesnih detalja koji se u pravilu ne predaju.

1. L.I. Ponomarev: **Kvantna kocka**, Školska knjiga, Zagreb, 1995 Jasna, zanimljiva i pristupačna priča i uvod o kvantnoj mehanici (cijena ≈ 130 kuna.)
2. R. Feinmann: **Osobitosti fizikalnih zakona**, Školska knjiga, Zagreb, 1977

O KVANTNOM HALL EFEKTU:

- Pogledajte tekst o FQHE [rubrika “Pročitali smo za vas”] na Webu adresi: <http://e-skola.hfd.hr> Server Hrvatskog Fizikalnog Društva (HFD) sadrži i niz drugih interesantnih podataka.
- Časopis *Physics Today* je redovito pratio istraživanja na tom području. Npr. broj: *December, 1998, page 17, page 23*. Tamo su navedene i druge reference.
- <http://www.warwick.ac.uk/~phsbn/qhe.htm>
<http://sp50.sp.phy.cam.ac.uk/SPWeb/research/FQHE.html>