

PROTJECANJA I VRTLOŽENJA

Aleksa Bjeliš¹

Fizički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilište u Zagrebu,
Zagreb, Bijenička 32

Teorijske postavke

Do strujanja u fluidu (tekućini, plinu, ...) dolazi kada su pojedini njegovi dijelovi podvrgnuti različitim silama, što se najčešće izražava vektorom usmjerenim duž smjera promjene tlaka zvanim *gradijentom* tlaka, ∇p , gdje je ∇ simbol za vektorsku derivaciju. Na pojedine male djeliće fluida («kapljice») djeluju konačne vanjske sile pa se, u skladu s Newtonovim zakonom, oni ubrzavaju. Međutim u fizici fluida najčešće se ne pitamo kako se giba pojedina kapljica, već kako izgleda protjecanje, pobliže, kako se brzina fluida u danoj točki prostora mijenja u vremenu. Zanima nas dakle funkcija $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.² Ubrzanje fluida u izabranoj točki prostora $\mathbf{r}$ ima dva doprinosa: onaj koji dolazi od ubrzanja kapljice koja se u taj čas nalazi u točki $\mathbf{r}$, $\partial \mathbf{v} / \partial t$, i onaj čije je porijeklo u različitim brzinama dane kapljice i njoj susjednih, $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$.

Fluidi u kojima pratimo protjecanja čine nam se neprekinutima. Za njihov opis dovoljno je pretpostaviti da su nam zamišljene «kapljice» dovoljno male da se svakoj od njih može pripisati jedinstvena brzina i da je mijenjanje brzine od kapi do kapi neprekinuta (kontinuirana) funkcija prostora i vremena. Dok je za praćenje protjecanja u šalici čaja dovoljno uzeti «kapljice» koje nisu veće od recimo kubičnog milimetra, za strujanja oceanskih vodenih masa ili za atmosferska zračna strujanja «kapljice» najčešće ne moraju biti manje od kubičnog kilometra.

Očigledno da uz takvu proizvoljnost u izboru veličina «kapljice» ne možemo očekivati kako ćemo u matematičkim jednadžbama za protjecanja moći u potpunosti uzeti u obzir potankosti u opisu međumolekularnih sila koje djeluju između «kapljica». Hidrodinamika kao teorija koja fluide tretira kao *klasične kontinuume* niti nema takav cilj. Ipak, da bi se dostigla dovoljna realističnost opisa strujanja na prostornim razmacima (*skalama*) koje su znatno veće od skale molekularne građe fluida, potrebno je uzeti u obzir da relativna gibanja susjednih kapljica utječu i na gibanja molekula u njima. Analogno gubicima energije zbog sila trenja kod relativnih gibanja krutina u dodiru, i ovdje se javljaju gubici energije zbog «unutrašnjeg trenja» među slojevima fluida koji se jedan spram drugog gibaju, tj. zbog konačne *viskoznosti* fluida. Odgovarajući doprinos u izrazu za ubrzanje je razmjernan drugim prostornim derivacijama brzine $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, tako da sveukupno dolazimo do Navier-Stokesove jednadžbe,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

kojom se u prvoj polovici XIX. stoljeća udario temelj za teoriju protjecanja fluida. Ovdje je ρ gustoća mase fluida za koju smo pretpostavili da je konstantna (što je svojstvo *nestišljivih*

¹ bjeliš@phy.hr

² U cijelom su tekstu vektorske veličine označene masnim slovima, a skalarne kurzivom.

fluida), dok je ν koeficijent viskoznosti. U granici $\nu \rightarrow 0$ jednačba (1) svodi se na stariju Eulerovu jednačbu (1755.) za idealne fluide bez viskoznosti.

Raspad uređenih protjecanja na neuređena (termička) gibanja molekula

Mjerimo li prostorne udaljenosti i brzinu protjecanja karakterističnom veličinom sustava (l) u kojem fluid teče (npr. širinom cijevi, veličinom zapreke, itd.) i karakterističnom *ulaznom* brzinom (u) fluida na rubovima (npr. brzinom koju fluid ima na ulazu u cijev, ili daleko od zapreke), pokazuje se da je, uz dane geometrijske karakteristike sustava, u Navier-Stokesovoj jednačbi prisutan samo jedan bezdimenzionalni parametar zvan Reynoldsov broj, $R \equiv ul / \nu$. Pojedina rješenja te jednačbe imaju stoga općenito oblik $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = u \mathbf{f}(\mathbf{r}/l, t, R)$.

Kontinuiranim mijenjanjem parametra R proći ćemo kroz sva moguća protjecanja koja se u fluidu mogu pojaviti. Za fluide koji mogu imati jako različita svojstva viskoznosti, ili različite ulazne brzine, ili različite prostorne dimenzije, vrijedi dakle *zakon sličnosti* po kojem će se u njima javljati istovjetna strujanja ako su im Reynoldsovi brojevi jednaki.

S druge strane, tijekom svakog protjecanja fluida kod kojeg dolazi do trenja među susjednim slojevima dio kinetičke energije zbog gibanja «kapljica» se gubi tako da se pretvara u nasumična molekularna (tj. toplinska) gibanja. Brzina promjene kinetičke energije, tj. pretvaranja uređene kinetičke energije u neuređenu (toplinsku), razmjerna je izrazu

$$\frac{1}{R} \left\langle \sum_{i,j=x,y,z} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \tilde{r}_j} + \frac{\partial f_j}{\partial \tilde{r}_i} \right)^2 \right\rangle \quad (2)$$

u kojem je $\tilde{r} \equiv \mathbf{r}/l$, dok $\langle \dots \rangle$ zagrada označava usrednjenje preko prostora. Derivacije $\partial f_i / \partial \tilde{r}_j$ imaju jednostavnu interpretaciju: one su mjera promjene i -te komponente reducirane brzine $\mathbf{f} = \mathbf{v}/u$ u j -tom smjeru.

Uočimo sada kako u fluidu dane viskoznosti Reynoldsov broj raste s porastom karakteristične brzine (a to znači i karakteristične kinetičke energije) zbog uređenog gibanja kapljica u makroskopskom protjecanju. Bržim gibanjem fluida sve će se više uređene kinetičke energije pretvarati u neuređenu, tj. pozitivan izraz (2) će rasti. To pak znači da usrednjena veličina u tom izrazu mora rasti brže od Reynoldsova broja u nazivniku. Taj izraz može rasti samo ako derivacije $\partial f_i / \partial \tilde{r}_j$ rastu, tj. ako se protjecanje organizira tako da razlike brzina susjednih kapljica bivaju sve veće i veće.

Prisjetimo se da, kako smo već istakli, ovaj zaključak mora vrijediti za široki raspon veličina kapljica, tj. da povećanje relativnih brzina mora biti prisutno u širokom rasponu skala, ograničenih jedino zahtjevom da su one dovoljno velike u usporedbi s molekularnim skalama i dovoljno male u usporedbi s veličinom cijelog sustava u kojem pratimo protjecanje. Ovaj jednostavni način zaključivanja dovodi nas do grubog razumijevanja pojave koju redovito uočavamo kad promatramo nemirne (turbulentne) tokove; do vrludavog gibanja djelića (kapljica) fluida na svim skalama na kojima pratimo njegovo protjecanje.

Prijelaz s «mirnih» (laminarnih) na «nemirna» (turbulentna) protjecanja

Iskustvo nam kazuje kako je za dovoljno male Reynoldsove brojeve protjecanje fluida «mirno» (laminarno), takvo da je u svakoj točki prostora brzina nepromjenljiva u vremenu, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Turbulentno protjecanje se pak javlja kada Reynoldsov broj premaši neku kritičnu vrijednost između 100 i 1000, ovisno o geometrijskim detaljima sustava. Središnje i jedno od najtežih općenitih pitanja koje se provlači kroz povijest teorije fluida i klasične fizike je: kroz kakva sve protjecanja fluid prolazi «na putu» od laminarnog na turbulentno protjecanje?

Da bi se na ovo pitanje moglo odgovoriti treba ispitivati stabilnost pojedinih rješenja Navier-Stokesove jednadžbe (2). Metodu analize stabilnosti razvili su Landau i Hopf pedesetih godina 20. stoljeća. Početno pitanje je: Kako laminarno rješenje prestaje biti stabilno povećavanjem Reynoldsova broja? Pokazuje se da ga za R veći od neke kritične vrijednosti R_1 nadomještava rješenje u kojem je u svakoj točki fluida brzina periodička funkcija vremena s kružnom frekvencijom ω_1 (i periodom $2\pi/\omega_1$) koja ovisi o Reynoldsovu broju, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t + 2\pi/\omega_1) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Spektar takvog protjecanja zadan je vršcima na temeljnoj frekvenciji ω_1 i njezinim višim harmonicima, $N_1 \omega_1$, gdje su N_1 cijeli brojevi.

Daljnijim povećanjem Reynoldsova broja takvo periodičko protjecanje postaje nestabilno za R veće od neke druge kritične vrijednosti $R_2 > R_1$, tako da ga nadomještava protjecanje u kojem brzinu u danoj točki fluida karakteriziraju dvije vremenske periodičnosti s kružnim frekvencijama ω_1 i ω_2 . Takve se vremenske promjene nazivaju dvoperiodičkima. Pripadni spektar sada ima dvije temeljne frekvencije i njihove harmonike.

Prateći prijelaz s laminarnog na periodičko, pa zatim dvoperiodičko, protjecanje, Landau i Hopf nastavljaju u tom smjeru i razvijaju teoriju po kojoj se u daljnjim prijelazima u vremenskoj ovisnosti rješenja $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sukcesivno javljaju nove i nove temeljne frekvencije. Drugim riječima, sustav prolazi kroz protjecanja u kojima brzina postaje troperiodička, četverperiodička, ..., funkcija vremena za vrijednosti Reynoldsova broja $R_3 < R_4 < \dots$. Po toj teoriji turbulentno ponašanje i nije ništa drugo nego vremenski ovisno protjecanje u kojem je superponiran dovoljno veliki broj frekvencija $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$. Ukratko, po Landauu i Hopfu turbulentna protjecanja su višeperiodičke (multi-periodičke) pojave. Njihova ključna predikcija je da će se u spektru turbulentnog protjecanja javiti diskretan skup temeljnih frekvencija i njima odgovarajućih viših harmonika. Ona se može provjeriti spektrometrijskim mjerenjima, ali ne i izravnim vizualnim praćenjem protjecanja. Naime, ljudskoj percepciji već superpozicija nekoliko različitih periodičnosti ostavlja dojam sasvim nasumične pojave u kojoj se ne uočava nikakva unutrašnja pravilnost.

U Landau-Hopfovom pristupu sustavno se prate svojstva vremenskih ovisnosti rješenja $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, dok se prostorne ovisnosti stavljaju u drugi plan. Na taj se način hidrodinamička teorija (1) svodi na sustav izvedenih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi s konačnim brojem varijabli («stupnjeva slobode»), jednakim broju gore uvedenih frekvencija. Takvi sustavi se javljaju u mnogim raznorodnim situacijama, ne samo unutar prirodnih već i unutar tehničkih, medicinskih i društvenih znanosti. Proteklih desetljeća ostvaren je veliki napredak u njihovu razumijevanju, ne samo zahvaljujući brzom razvoju numeričkih metoda i simulacija, već i produblivanjem rigoroznih istraživanja njihovih općenitih svojstava.

Jedan od takvih rigoroznih rezultata imao je izravni utjecaj na napredak u razumijevanju nastajanja turbulentnih tokova. Ruelle i Takens su osamdesetih godina dvadesetog stoljeća ustvrdili da općenito dinamički sustavi skoro nikad neće, nakon prijelaza s vremenski neovisnog («laminarnog») u periodičko i dvoperiodičko ponašanje, ući u troperiodičko ponašanje. Namjesto njega nastupa stanje u kojem vremenska ovisnost stupnjeva slobode ima sve odlike kaotičnosti. Ono je neponovljivo i, za razliku od multiperiodičkih stanja, izrazito osjetljivo na male utjecaje. Spektar takvih vremenskih ovisnosti je kontinuiran, tj. ima odlike spektra šuma.

Daljnja bitna razlika ovakvog gibanja u odnosu na multiperiodička, ogleda se u svojstvima tzv. *dimenzije atraktora*, efektivnog broja stupnjeva slobode koji su aktivni u vremenski ovisnoj pojavi. Kod multiperiodičkih gibanja dimenzija atraktora podudara se s brojem aktiviranih frekvencija, dakle ona je nula za laminarne tokove, jedan za periodičke tokove, dva za dvoperiodičke tokove, itd. Pripadni atraktori simbolički se predstavljaju točkom, kružnicom, torusom, Kaotično gibanje koje po Ruelleu i Takensu nastupa nakon dvoperiodičkog gibanja karakterizirano je tzv. čudesnim (stranim) atraktorom. Čudesni atraktor simbolizira se objektom koji ima necjelobrojnu (fraktalnu) dimenziju čija je vrijednost veća od dva i manja od tri. Takav objekt može se uroniti u trodimenzionalni prostor, ali se ne može prekriti dvodimenzionalnom plohom.

Ruelle-Takensov teorem omogućava opis pojave turbulencije koji je drukčiji od Landau-Hopfova. Po njemu, turbulentnost ima sva svojstva nepredvidivog (kaotičnog) gibanja, i nastupa već destabilizacijom dvoperiodičkog gibanja. Za opis ovog gibanja dovoljno je prilikom uspostave modela uzeti u obzir samo tri stupnja slobode.

Unatoč iznenađujućem konceptualnom pojednostavljenju koje uvodi Ruelle-Takensov pristup, problem turbulencije još krije u sebi mnoge nepoznanice. Jedna od njih ogleda se u činjenici da brojni konkretni modeli s tri varijable koji polaze od takvog koncepta vode na još jednostavnije «scenarije» pojave turbulentnosti, npr. na takve kod kojih sustav nakon laminarnog i periodičkog protjecanja izravno prelazi u kaotično stanje karakterizirano čudesnim atraktorom. Nadalje, nejasno je do koje mjere je opravdano pretpostaviti da pojedinosti prostornih ovisnosti u protjecanjima nisu relevantne za nastajanje turbulencija. I ovdje smo se novim odgovorom na staro pitanje našli pred nizom novih pitanja

Literatura:

L. D. Landau i E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Second edition, Pergamon Press, 1987.