

# Brownovo gibanje

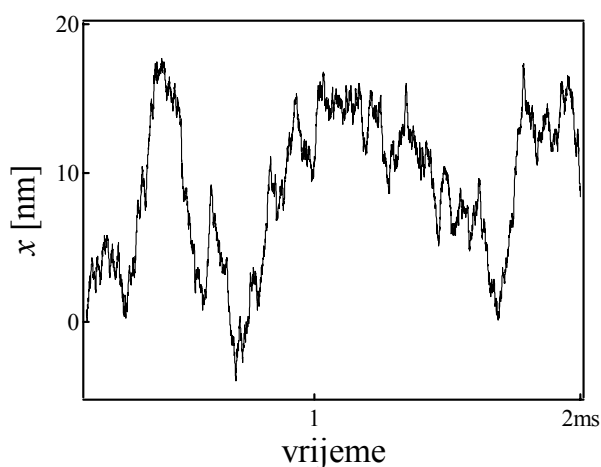
Branimir Lukić<sup>1</sup>

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Einsteinov rad iz 1905. godine [1], «O zahtjevima molekularno-kinetičke teorije topline na gibanje čestica raspršenih u stacionarnoj tekućini», je povezao nasumično Brownovo gibanje čestica na mikroskali s njihovom difuzijom na makroskali. Na početku 20. stoljeća Einsteinovo teorijsko predviđanje i eksperimentalni rad Jeana Perrina konačno su potvrdili postojanje atoma. Vizija koju je ovaj rad postavio – da se naš makroskopski svijet zasniva na neprekidnim fluktuacijama svojih elementarnih dijelova – je nastavio da inspirira istraživanja sve do današnjeg dana u najrazličitijim znanstvenim disciplinama.

U okviru predavanja, ispitati ćemo osnove Brownovog gibanja te staviti Einsteinov rezultat u povijesni kontekst u kojem se pojavio.

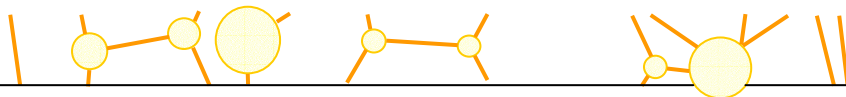
## Brownovo gibanje



**Slika 10-1:** Brownovo gibanje. Krivulja gibanja kuglice od lateksa promjera  $2.5 \mu\text{m}$  u vodi tijekom prve 2 milisekunde.

Kuglica od jednog mikrometra će se u vodi na sobnoj temperaturi gibati nasumično – poput pijanca koji se zanosi čas na jednu, čas na drugu stranu dok hoda. Ukoliko mjerimo njezin položaj u vremenu  $x(t)$ , dobit ćemo krivulju koja nije kontinuirana, već isprekidana (slika 10-1). Kojim veličinama možemo opisati njezino gibanje? Npr. brzina ili akceleracija nam neće biti od velike koristi, pošto vektor brzine nasumično mijenja smjer. Ako mjerimo udaljenost između dvije točke na slici 1, tj. gledamo razliku  $|x_2 - x_1|$ , vidjet ćemo da ne možemo predvidjeti vrijednost  $|x_2 - x_1|$ . Još gore, ako ponovno snimimo položaj kuglice, vidjet ćemo sasvim drukčiju krivulju.

<sup>1</sup> <http://nanotubes.epfl.ch/lukic>, branimir.lukic AT epfl.ch



Na koji način možemo opisati njezino gibanje? Krenimo od Newtonovih zakona koji kažu da je zbroj svih stila koje djeluju na česticu jednak umnošku mase  $m$  i akceleracije  $a$  čestice. Vanjske sile  $F_V$  koje djeluju na česticu će dovesti do njenog gibanja. Ali na kuglicu u pokretu koja se nalazi u viskoznoj tekućini s koeficijentom trenja  $\gamma$ , će djelovati i sila trenja  $F_{tr} = -\gamma v$ , gdje je  $v$  brzina čestice. Jednadžba koja opisuje gibanje čestice u tekućini je onda dana s

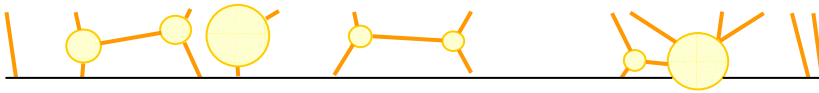
$$ma = F_{tr} + F_V = -\gamma v + F_V \quad (1)$$

Nasumičnost koju vidimo na slici 1 može doći jedino od vanjske sile  $F_V$ , koja pak može doći samo od tekućine u kojoj se kuglica nalazi. Danas znamo da tekućina nije kontinuirani medij, već se sastoji od molekula. Gibanje molekula pak možemo opisati u prvoj aproksimaciji idealnim plinom gdje se svaka molekula giba pravocrtno konstantnom brzinom i mijenja smjer prilikom sudara s ostalim molekulama ili zidovima posude u kojoj se nalazi. Naravno, ukoliko stavimo kuglicu u takav medij, molekule će se sudarati i s kuglicom. Pri svakom sudaru vrijedi zakon očuvanja momenta gibanja koji je vektorska veličina. Ukoliko pri sudaru molekula s momentom gibanja  $p$  promijeni smjer gibanja za  $180^\circ$ , kuglica će dobiti moment  $2p$ . Sila kojom onda molekula djeluje na kuglicu je jednaka  $2p/\Delta t$ , gdje je  $\Delta t$  vrijeme u kojem se dogodila promjena impulsa molekule. Da bi opisali silu  $F_V$  i opisali gibanje  $x(t)$  trebali bi opisati kada koja molekula udara u kuglicu, te kojom brzinom. Kako je broj molekula reda  $10^{23}$ , potreban nam je alternativni pristup.

Ukoliko jednadžbu (1) pomnožimo s položajem  $x(t)$ , dobit ćemo član  $F_V(t)x(t)$ . Kako molekule nasumično udaraju u kuglicu, smjer sile  $F_V$  neće biti povezan s pomakom kuglice: neće se dogoditi da ako se kuglica giba u desno, da će sve molekule gurati kuglicu u desno - smjer sile ne ovisi o pomaku kuglice. Drukčije rečeno, kažemo da veličine  $F_V(t)$  i  $x(t)$  nisu korelirane i ukoliko njihov umnožak sumiramo kroz određeni vremenski period, dobit ćemo nulu. Tj. prosjek umnoška je jednak nuli  $\langle F_V(t)x(t) \rangle = 0$  gdje zagrada „ $\langle \rangle$ ” označava «uprosječno po vremenu». Na taj način, jednadžba (1) postane

$$\langle m\dot{x}a \rangle + \gamma \langle xv \rangle = \langle xF_V \rangle = 0 \quad (2)$$

Jednadžba (2) kaže da više ne možemo govoriti o kontinuiranim veličinama (tj. gdje se čestica nalazi u kojem trenutku), već samo o prosječnim veličinama. Ako upotrijebimo diferencijalni račun ( $a = dv/dt$ , i  $v = dx/dt$ ) možemo riješiti jednadžbu (2) (potpuni prikaz rješenja je dan u [2] ili [3]). Pri tome moramo koristiti ekviparticioni teorem koji kaže  $\langle mv^2 \rangle = kT/2$ , gdje je  $k$  Boltzmannova konstanta, a  $T$  termodinamička temperatura. Ekviparticioni teorem kaže kako je kinetička energija svakog stupnja slobode (npr. translacija u  $x$  smjeru) u idealnom plinu (tj. tekućini) jednaka  $kT/2$ . Kako su tekućina i kuglica u termodinamičkoj ravnoteži (tj. neće se dogoditi da se kuglica giba brže na račun hlađenja tekućine), istu energiju možemo uzeti i za kinetičku energiju kuglice. Rješenje na kraju vodi na rješenje



$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2kT}{\gamma} t \quad (3)$$

Prosječni kvadrat odstupanja od početnog položaja raste proporcionalno s vremenom. Premda ne možemo točno predvidjeti položaj kuglice, ipak možemo opisati koliko brzo će se kuglica gibati i dokle će stići nakon vremena  $t$ . Što je temperatura tekućine veća, kvadrat odstupanja će biti veći, tj. kuglica će brže istraživati okolinu. Što je trenje kuglice s tekućinom veće, kuglica će se gibati sporije. Kuglica konstantno dobiva kinetičku energiju od nasumičnog gibanja molekula tekućine, koju zatim gubi pri trenju s tim istim molekulama.

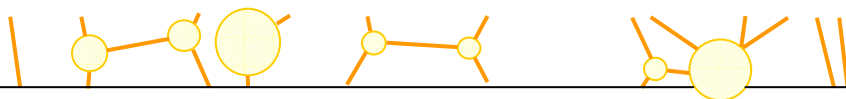
Možemo se dalje pitati što se događa na vrlo malim vremenima? Što bi bilo kada bi imali samo jednu molekulu i jednu kuglicu? Prilikom sudara, one bi se ponašale kao dvije biljarske kugle, sa savršeno definiranim položajem i brzinom. Kuglica bi se onda ponašala kao  $\langle x^2 \rangle \propto t^2$ . Ako bi mogli mjeriti položaj kuglice dovoljno brzo, došli bismo i do tog ponašanja koje zovemo balističkim. U jednadžbi (1) smo dodatno pretpostavili kako je sila trenja uvijek proporcionalna brzini. Ipak to nije istina na malim vremenskim skalama. Kada molekule vode daju svoj moment gibanja kuglici, kuglica će im dio tog momenta vratiti, tako da će se i molekule vode gibati usmjereno, tj. ne više nasumično. U tom režimu gibanja će se kuglica zapravo gibati sporije od gibanja predviđenog u jednadžbi (3). Za kuglicu promjera oko mikrona, vrijeme kada počinje vrijediti jednadžba (3) iznosi oko 3 milisekunde [4]. U ostatku teksta, baviti ćemo se samo s fenomenom opisanim jednadžbom (3). Taj režim gibanja zovemo difuzivnim.

### Nasumični šetač – matematički model Brownovog gibanja

Brownovo gibanje možemo matematički opisati modelom nasumičnog šetača. Uzet ćemo jednodimenzionalni model gdje je šetač točka koja se može micati diskretnim koracima po pravcu, lijevo ili desno. Vjerovatnost da se pomakne na lijevo ili desno je pri svakom koraku jednaka, i ne ovisi o položaju na pravcu. Ako je svaki korak dužine  $L$ , gdje će se točka nalaziti nakon  $n$  koraka? Razmak između položaja točke u  $n$ -tom koraku,  $X_n$  i u prethodnom  $(n-1)$ -tom koraku,  $X_{n-1}$  je  $L$ , tj.  $X_n = X_{n-1} + L$ . Kako je  $X_n^2 = X_{n-1}^2 + 2 \cdot X_{n-1}L + L^2$  i ako uzmemo prosjek (uz  $\langle X_{n-1}L \rangle = 0$ ), dobijemo  $\langle X_n^2 \rangle = \langle X_{n-1}^2 \rangle + L^2$ . Ukoliko sada nastavimo s rješavanjem, uz  $X_{n-1} = X_{n-2} + L$  i  $\langle X_n^2 \rangle = \langle X_{n-2}^2 \rangle + 2L^2$ , dobit ćemo na kraju  $\langle X_n^2 \rangle = nL^2$ . Kako je broj koraka  $n$  proporcionalan vremenu (recimo da je za svaki korak potrebno određeno vrijeme  $\Delta t$  i  $t = n \Delta t$ ), dobijemo

$$\langle X_n^2 \rangle = 2Kt \quad (4)$$

gdje je  $K$  konstanta proporcionalnosti ( $K = L^2/(2\Delta t)$ ). Usporedimo li relacije (3) i (4), vidjet ćemo da se radi o istom predviđanju – prosječni kvadratni pomaka raste linearno



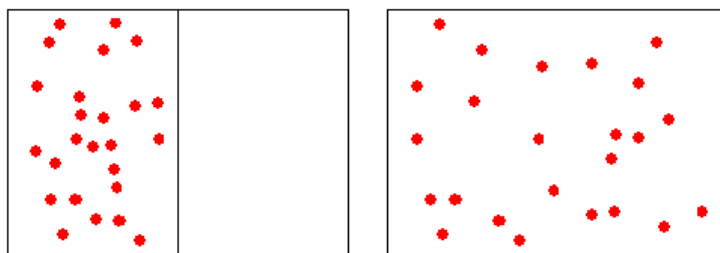
s vremenom. Tj. naše rješavanje jednadžbe gibanja (1) nam je dalo rezultat kao i matematički model nasumičnog šetača.

## Difuzija

Iz modela nasumičnog šetača se dalje može izračunati vjerovatnost nalaženja točke na bilo kojoj točki pravca. Potpuni račun [5] kaže da se vjerovatnost nalaženja točke ravna po jednadžbi difuzije, te da je konstanta  $K$  jednaka konstanti difuzije  $D$ . Difuzija je pojam vezan uz gibanje molekula plina (slika 10-2). Ukoliko imamo posudu s plinom, ali dva odjeljka koji imaju različite koncentracije. Uklanjanjem pregrade, koncentracije će se izjednačiti. Brzina kojom će čestice iz područja veće koncentracije preći u područje niže koncentracije je opisana upravo konstantom  $D$ . Relacije (4) i (5) onda daju

$$D = \frac{kT}{\gamma} \quad (5)$$

Veličina  $\gamma$  je jednaka  $6\pi\eta R$ , gdje je  $\eta$  viskoznost tekućine, a  $R$  polumjer kuglice<sup>2</sup>. Relacija (5) povezuje konstantu difuzije  $D$ , koja je makroskopsko svojstvo, i koeficijent trenja  $\gamma$  koji ovisi o mikroskopskom parametru kuglice poput  $R$ . Ili drugim riječima, relacije (4) – (5) kažu da je  $D = \langle x^2(t) \rangle / (2t)$ , tj. makroskopski parametar  $D$  možemo izračunati samo iz fluktuacije mikroskopske varijable  $x(t)$ . Iz nasumične varijable  $x(t)$  na mikroskali dobili smo „glatke“ krivulje na makroskali (jednadžba difuzije je kontinuirana diferencijalna jednadžba). Upravo u ovom razumijevanju leži najveći Einsteinov doprinos u članku o Brownovom gibanju iz 1905. godine.

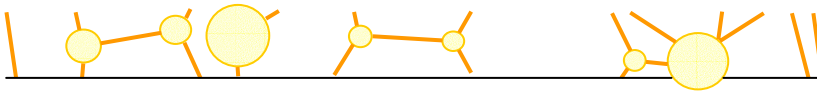


**Slika 10-2:** Difuzija. Brzina izjednačavanja koncentracija u dva odjeljka posude opisana je konstantom difuzije  $D$ .

## Einsteinov doprinos u povijesnom kontekstu

Već po otkriću mikroskopa u 17. stoljeću, zabilježena su i prva opažanja Brownovog gibanja [6]. Ipak, uzrok gibanja je objašnjavan biološki, kao gibanje živih bića. Škotski botaničar Robert Brown je 1827. napravio sistematska istraživanja

<sup>2</sup> Premda od početka govorimo o kuglici polumjera  $R$ , jednadžbe (4) i (6) su generalnije i važe za objekt bilo kojeg oblika. U tom slučaju  $\gamma$  opet ovisi o viskoznosti tekućine  $\eta$  i veličini objekta.



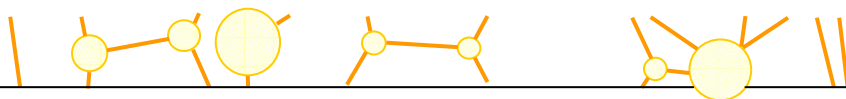
kaotičnog gibanja čestica i isključio svaku biološku osnovu vidjevši slično ponašanje i kod čestica minerala [7]. Brown je također isključio bilo kakve optičke efekte ili smetnje koje bi uzrokovale ovo gibanje. Ipak, Brownovi rezultati nisu pobudili veće zanimanje, i većina znanstvenika je uzrok gibanja vidjela negdje drugdje – bilo u električnim efektima, napetosti površine ili razlikama temperature na mikroskali. U kontekstu jednadžbe (1), rasprava se u 19. stoljeću vodila o porijeklu vanjske sile na česticu  $F_v$  – je li biološkog, optičkog ili kakvog drugog porijekla? Léon Gouy je krajem stoljeća demonstrirao kako  $F_v$  dolazi od termalnih fluktuacija tekućine. Eksperimentalni pokušaji mjerenja Brownovog gibanja su davali kontradiktorne rezultate u pokušaju da mjere brzinu Brownove čestice (a ne srednji kvadrat odstupanja kao u jednadžbi (3)) [8].

Interpretacija ranih eksperimenata je bila temeljena na pretpostavci kontinuirane krivulje gibanja koja se uklapa u koncept svijeta kontinuirane materije koji je vladao fizikom 19. stoljeća. Pojave poput elektromagnetizma i širenja topline u tijelima su bile opisane moćnim pojmovnim aparatom – diferencijalnim jednadžbama. Difuzija je također bila opisana kontinuiranim diferencijalnim jednadžbama (poznate kao Fickovi zakoni po njemačkom patologu Adolfu Ficku). Krajem stoljeća Ludwig Boltzmann je razvio kinetičku teoriju plinova koja se zasnivala na pretpostavci o diskontinuiranoj materiji – tj. atomima. Teorija je mogla objasniti rezultate u termodinamici, ali ju je velik broj fizičara uzimao kao eksperimentalno neprovjerljivu hipotezu. Fizika 19. stoljeća se tako našla u filozofskom procjepu između „kontinuiranog“ i „diskretnog“ objašnjenja svijeta – dva i pol tisućljeća nakon Demokritove ideje o atomima.

Einstein je u članku iz 1905. godine prvo izveo relaciju (5) i time povezo dva koeficijenta,  $D$  i  $\gamma$ . Ovo je omogućilo mjerenje Boltzmannove konstante  $k$  i zatim Avogardovog broja  $N_A$  koji kaže koliko se molekula nalazi u jednom molu plina. Drugi dio članka se bavi izvedom relacije (5), gdje je Einstein razvio matematički model koji bi mu dopustio da predvidi gibanje Brownove čestice, i poveže ga s konstantom difuzije, tj.  $\langle x^2 \rangle = 2Dt$ . Paul Langevin je 1908. godine dao jednostavnu i direktnu metodu koju smo i slijedili u ovom tekstu postavljanjem jednadžbe (1) koja vodi na (3). Premda je bilo nekoliko eksperimenata koji su pokušali dokazati Einsteinova predviđanja, konačnu potvrdu je napravio Jean Perrin sa suradnicima u nizu eksperimenata između 1908. i 1911. godine. Eksperimenti su zahtijevali precizno određivanje veličine kuglica, kontrole njihovog polumjera i velik broj mjerenja. Preciznost njegovih eksperimenata nije ostavila prostora za sumnju u točnost Einsteinovih predviđanja i u diskretnu sliku svijeta baziranu na atomima<sup>3</sup>.

Ovi rezultati su doveli do prihvaćanja slike makroskopskog svijeta koji postoji zahvaljujući fluktuacijama na mikroskali. Početkom 20. stoljeća uslijedile su dvije revolucije bazirane na ostalim Einsteinovim člancima iz 1905. godine koje su više zaokupile pažnju fizičara – teorija relativnosti i kvantna mehanika. Kvantna mehanika je našla sličan princip na razini elementarnih čestica – gdje se položaj elektrona u atomu ne može opisati kontinuiranom krivuljom, već samo statistički – kroz

<sup>3</sup> U Langevinovom izvodu, diskretnost materije ulazi korištenjem ekviparticionog teorema između jednadžbi (3) i (4).



vjerovatnost da se elektron nađe određenoj točki prostora<sup>4</sup>. Ipak, statistička fizika se razvila na Einsteinovom modelu nasumičnog šetača i nastavila utjecati na naše shvaćanje svijeta sve do danas. Njene metode su primjenjene u shvaćanju fluktuacija cijene dionica na burzi<sup>5</sup> [9], ekoloških sistema, prometa, te funkcioniranju staničnih struktura.

Brownovo gibanje i termalne fluktuacije su najviše utjecali na razvoj znanosti o koloidima i staničnim strukturama [10]. Dok god se dinamika sistema nalazi u području energije bliskoj  $kT$ , termalne fluktuacije imaju bitan utjecaj na ponašanje sistema. Molekularni motori u stanicama [11] imaju pomake od nekoliko nanometara i vuku stanične organele od stanične membrane do jezgre silama od nekoliko pikonewtona, što znači da operiraju na energetske skali bliskoj  $kT = 4$  pN nm. Polimeri poput molekule DNA ili proteina su kompleksne strukture i termalne fluktuacije ne utječu samo na cijelu molekulu, već i na njihove unutrašnje dijelove – na svaki monomer posebno. Proučavanje Brownovog gibanja se i dalje nastavlja u pokušaju da odgovorimo kako se iz nereda gibanja pojedinih čestica nastaje red na većim skalama?

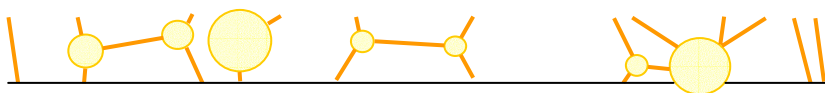
## Literatura

- [1] A. Einstein: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik* **17** (1905): 549-560.
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. L. Sands: The Feynman Lectures on Physics, Vol. I (Addison-Wesley, Reading, 1963).
- [3] F. Reif: Fundamentals of Statistical and Thermal Physics (McGraw-Hill, Singapore, 1965)
- [4] B. Lukić: Eksperimenti s optičkom pincetom, Zbornik Ljetne škole mladih fizičara HFD-a, Vela Luka, 2004, <http://www.hfd.hr/ljskola/2004/lukic.pdf>
- [5] D. K. Sunko: Statistička fizika, <http://www.phy.hr/dodip/notes/statisticka.html>
- [6] M. D. Haw: Colloidal suspension, Brownian motion, molecular reality: a short history, *Journal of Physics: Condensed Matter* **14** (2002): 7769-7779.
- [7] R. Brown: A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Philosophical Journal* **4** (1828): 161-173. (<http://sciweb.nybg.org/science2/pdfs/dws/Brownian.pdf>)

<sup>4</sup> Premda Einstein nije imao problema s prihvaćanjem statističkog opisa Brownove čestice, statistički opis elektrona ga nije zadovoljio [8].

<sup>5</sup> Model nasumičnog šetača za cijene dionica na burzi nezavisno je razvio Bachelier 1900. godine [6].





- [8] M. D. Haw: Einstein's random walk, *Physics World*, January 2005, <http://physicsweb.org/articles/world/18/1/3/1>
- [9] M. Latković: Streetwise, Zbornik Ljetne škole mladih fizičara HFD-a, Jelsa, 2001, <http://www.hfd.hr/ljskola/2001/latkovic-mladen/latkovic-mladen.htm>
- [10] E. Frey & K. Kroy: Brownian motion: a paradigm of soft matter and biological physics, *Annalen der Physik (Leipzig)* **14** (2005): 20-50.
- [11] I. Weber: Mehanika staničnog skeleta, Zbornik Ljetne škole mladih fizičara HFD-a, Vela Luka, 2003, <http://www.hfd.hr/ljskola/2003/iweber.doc>

